

Diffusion der Säkularvariation durch den lateral inhomogenen Erdmantel

Von der Fakultät für Elektrotechnik, Informationstechnik, Physik
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
genehmigte
D i s s e r t a t i o n

von Jens Stadelmann
aus Braunschweig

Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie. Detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

1. Referent: Prof. Dr. Karl-Heinz Glaßmeier
2. Referent: Prof. Dr. Ludwig Engelhard
eingereicht am: 9. Juli 2010
mündliche Prüfung (Disputation) am: 14. Juli 2011

ISBN 978-3-942171-67-0

uni-edition GmbH 2012
<http://www.uni-edition.de>
© Jens Stadelmann



This work is distributed under a
Creative Commons Attribution 3.0 License

Printed in Germany

Vorveröffentlichungen der Dissertation

Teilergebnisse aus dieser Arbeit wurden mit Genehmigung der Fakultät für Elektrotechnik, Informationstechnik, Physik, vertreten durch den Mentor oder den Betreuer der Arbeit, in folgenden Beiträgen vorab veröffentlicht:

Tagungsbeiträge

Stadelmann, J. und Weidelt, P., 2005. Electromagnetic time constants of the Earth's mantle (Poster). In Ritter, O. und Brasse, H. (Hg.), Protokoll über das 21. Kolloquium „Elektromagnetische Tiefenforschung“, Holle, 91–110. Deutsche Geophysikalische Gesellschaft e. V.

Stadelmann, J., 2003. Diffusion der Säkularvariation durch den lateral inhomogenen Erdmantel (Poster). In Hoerdt, A. und Stoll, J. (Hg.), Protokoll über das 20. Kolloquium „Elektromagnetische Tiefenforschung“, Königstein, 300–305. Deutsche Geophysikalische Gesellschaft e. V.

Stadelmann, J., 2003. Magnetic field diffusion in the Earth mantle. (Vortrag). Kolloquium des DFG-Schwerpunktprogramms Erdmagnetische Variationen, Potsdam.

Stadelmann, J. und Weidelt, P., 2002. Diffusion of the secular variation through the laterally non-uniform mantle. (Poster). Kolloquium des DFG-Schwerpunktprogramms Erdmagnetische Variationen, München.

Weidelt, P. und Stadelmann, J., 2002. Diffusion of the secular variation through the heterogeneous mantle (Poster). In Ritter, O. und Brasse, H. (Hg.), 16th EM Induction Workshop, Santa Fe, EM8–7. International Association of Geomagnetism and Aeronomy (IAGA).

Stadelmann, J., 2001. Diffusionszeiten für radiale und tangentielle Magnetfelder (Vortrag). In Hoerdt, A. und Stoll, J. (Hg.), Protokoll über das 19. Kolloquium „Elektromagnetische Tiefenforschung“, Burg Ludwigstein, 253–262. Deutsche Geophysikalische Gesellschaft e. V.

Stadelmann, J. und Weidelt, P., 2001. Diffusion of the geomagnetic secular variation through the electrically conducting mantle. (Poster). Kolloquium des DFG-Schwerpunktprogramms Erdmagnetische Variationen, Braunschweig.

Stadelmann, J. und Weidelt, P., 2001. Diffusion times of the geomagnetic secular variation through the electrically conducting mantle (Poster). AGU Fall Meeting, San Francisco.

Berichte

Stadelmann, J. und Weidelt, P., 2005. Diffusion of the geomagnetic secular variation through the heterogeneous mantle. Abschlußbericht im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms Erdmagnetische Variationen. Institut für Geophysik und Extraterrestrische Physik, Technische Universität Braunschweig.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Elektrische Leitfähigkeit des Erdmantels	5
1.1 Aufbau der Erde	7
1.2 Methoden zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit	11
1.2.1 Magnetotellurik	12
1.2.2 Säkularvariation	13
1.2.3 Weitere Methoden	14
1.3 Verlauf der elektrischen Leitfähigkeit	17
1.3.1 Erdkruste und oberer Mantel	17
1.3.2 Unterer Mantel	19
1.3.3 D''-Schicht und Kern-Mantel-Grenze	22
1.3.4 Äußerer Kern	24
1.4 Modelle der elektrischen Leitfähigkeit des Mantels	24
2 Diffusion durch den geschichteten Mantel	29
2.1 Annahmen und Voraussetzungen	30
2.2 Feldgleichungen	31
2.3 Quasi-stationäre Näherung	31
2.4 Diffusionsgleichung für die magnetische Flußdichte	32
2.5 Mie-Darstellung	34
2.6 Poloidale und toroidale magnetische Mode	35
2.7 Poloidales Potential	38
2.8 Übertragungsfunktionen für den geschichteten Mantel	45
2.8.1 Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen	45
2.8.2 Fortsetzung des Potentials	47
2.8.3 Übertragungsfunktionen	49
2.9 Harmonische Anregung	50
2.10 Beliebige Anregungen	53
2.11 δ -Impuls	55
3 Zeitkonstanten des Mantels	59
3.1 Einführung der Zeitkonstanten	60
3.2 Bestimmung der Zeitkonstanten	64
3.3 Infinitesimal dünne Schicht	72
3.4 Zeitkonstanten des geschichteten Mantels	73
3.5 Rolle der Komponenten	79
3.6 Bedeutung der Zeitkonstanten	80

4	Statistische Magnetfeld-Anregung	85
4.1	Stationäre Gauß-Prozesse	86
4.2	Das Erdmagnetfeld als stationärer Gauß-Prozeß	89
4.3	Fortsetzung der Gauß-Prozesse durch den Mantel	93
4.4	Einfluß des Mantels auf das Spektrum an der Erdoberfläche	95
4.4.1	Weißes Magnetfeldspektrum an der Kern-Mantel-Grenze	96
4.4.2	Rotes Magnetfeldspektrum an der Kern-Mantel-Grenze	100
5	Diffusion der Säkularvariation durch den lateral inhomogenen Mantel	109
5.1	Berechnung des Feldes an der Erdoberfläche	110
5.1.1	Modellstruktur und Grundgleichungen	110
5.1.2	Integralgleichung und Feldfortsetzung	112
5.1.3	Modell $S\delta_2$ eines lateral inhomogenen Mantels	114
5.1.4	Übertragungsfunktionen	117
5.2	Feststehender Dipol	118
5.2.1	G_1^1 -Dipol	119
5.2.2	H_1^1 -Dipol	121
5.3	Rotierender Dipol	124
5.4	Statistisches Restfeld	131
5.4.1	B_r^2 des IGRF	132
5.4.2	Rotationsinvariantes statistisches Modell	134
5.4.3	Erwartungswert und Varianz von B_r^2	136
5.4.4	Einfluß des lateral inhomogenen Mantels auf B_r^2	146
5.4.5	Bewertung des Einflusses eines lateral inhomogenen Mantels	157
	Zusammenfassung	159
	A Vektorformeln	165
	B Realisierung stationärer Gauß-Prozesse	171
	Literatur	177
	Danksagung	185

Einleitung

Die „Diffusion der Säkularvariation durch den lateral inhomogenen Erdmantel“ ist Gegenstand dieser Arbeit. Aber was genau diffundiert durch den Mantel?

Zeitliche Änderungen des Erdmagnetfeldes auf einer Zeitskala von Jahrhunderten sind schon lange bekannt. Bereits Gellibrand berichtet 1634 über sie, lange bevor Gauß 1838 die Zerlegung des Magnetfeldes in inneren und äußeren Anteil mit Hilfe der Kugelfunktionsanalyse beschreibt. Diese Änderungen werden als geomagnetische Säkularvariation bezeichnet. In den Namen geht das lateinische Wort *saeculum* für Jahrhundert ein. Teils wird der Begriff Säkularvariation immer noch in diesem engen Sinn für Änderungen mit Zeitkonstanten zwischen 100 und 1000 Jahren verwendet (z. B. Martin, 2000). Meist versteht man unter Säkularvariation allgemein Magnetfeldänderungen internen Ursprungs, siehe z. B. Kertz (1969), der bei einer Periode von 4 Jahren eine Grenze zieht. Langsamere Änderungen sind überwiegend internen Ursprungs, während kürzere Perioden im wesentlichen externen Quellen zuzuordnen sind. Dabei gibt es durchaus Überschneidungen. Beispielsweise gibt es geomagnetische Impulse internen Ursprungs, sogenannte Jerks, die innerhalb eines Jahres ablaufen (Holme und de Viron, 2005).

In dieser Arbeit wird die Ausbreitung von internen Magnetfeldänderungen untersucht, wobei externe Magnetfeldquellen nicht betrachtet werden. Die Säkularvariation wird als zeitliche Ableitung des Magnetfeldes definiert. Wenn die magnetische Flußdichte \mathbf{B} das Erdmagnetfeld internen Ursprungs beschreibt, dann ist die Säkularvariation die zeitliche Änderung $d\mathbf{B}/dt$.

Das Magnetfeld wird durch einen Dynamoprozeß im flüssigen äußeren Erdkern erzeugt, dessen elektrische Leitfähigkeit von über $2 \cdot 10^5$ S/m vergleichsweise hoch ist. Die Säkularvariation wird auf ihrem Weg von der Kern-Mantel-Grenze an die Erdoberfläche durch elektromagnetische Induktion im Mantel gestört, wo die elektrische Leitfähigkeit größtenteils unterhalb von 10 S/m liegt (Shankland et al., 1993). Eine deutlich höhere elektrische Leitfähigkeit von bis zu 2000 S/m (Ono et al., 2006) wird für die D''-Schicht, die untersten 250 km des Mantels, in Betracht gezogen. Außerdem gibt es möglicherweise direkt an der Kern-Mantel-Grenze einen schmalen Bereich mit einer noch höheren Leitfähigkeit (Buffett et al., 2000). Zudem werden ausgeprägte laterale Unterschiede der Ausbreitungsgeschwindigkeit seismischer Wellen in der D''-Schicht beobachtet, und über eine lateral inhomogene Leitfähigkeit in dieser Region wird diskutiert (Backus et al., 1996; Merrill et al., 1996).

Für die Ausbreitung der Säkularvariation gilt eine Diffusionsgleichung (Kapitel 2) ähnlich der, die von der Ausbreitung von Wärme oder vom Ausgleich von Teilchenkonzentrationen bekannt ist, allerdings liegen unterschiedliche physikalische Gesetze zugrunde. Eine bekannte Anwendung der Diffusionsgleichung für \mathbf{B} ist der Zerfall des Kernfeldes, das innerhalb von etwa 15000 Jahren exponentiell auf den $1/e$ -ten Teil abklänge, wenn der magnetfelderzeugende Dynamoprozeß plötzlich endete (Backus et al., 1996; Stacey und Davis, 2008).

Die Untersuchung des Einflusses der Mantelleitfähigkeit auf die Fortsetzung der beobachteten Säkularvariation an die Kern-Mantel-Grenze ist von Interesse beispielsweise für die Bestimmung der tangentialen Flüssigkeitsströmung aus der verlässlichen Kenntnis der radialen Magnetfeldkomponente (Benton und Whaler, 1983; Ballani et al., 2002). Die Kenntnis der Diffusion der Säkularvariation durch den Mantel kann möglicherweise relevante obere Schranken für die elektrische Leitfähigkeit liefern (McDonald, 1957; Backus, 1983; Holme, 1998). Außerdem wird versucht, Unterschiede im Verlauf der Säkularvariation in der atlantischen und pazifischen Hemisphäre durch großräumige Leitfähigkeitshomogenitäten im unteren Mantel und insbesondere in der D''-Schicht zu erklären (Costin und Buffett, 2004).

Um den Einfluß des Mantels auf die Säkularvariation untersuchen zu können, muß man eine Vorstellung haben, wie groß die elektrische Leitfähigkeit des Mantels ist. In Kapitel 1 wird knapp zusammengefaßt, was über die elektrische Leitfähigkeit des Mantels bekannt ist und woher dies Wissen stammt. Wie kann man bei einem vorgegebenen zeitlichen Verlauf des Feldes an der Kern-Mantel-Grenze und einem gegebenen Schichtmodell der Mantelleitfähigkeit das zugehörige Feld an der Oberfläche bestimmen? Diese Frage wird in Kapitel 2 beantwortet, in dem insbesondere die harmonische Anregung und der δ -Impuls als Anregung behandelt werden. Wie lange brauchen Magnetfeldänderungen, um den Mantel in Richtung Erdoberfläche zu durchqueren und wie stark werden sie dabei geglättet? Wie kann man eine ausgedehnte Schicht sinnvoll durch eine infinitesimal dünne Schicht approximieren? Das sind Fragen, denen in Kapitel 3 nachgegangen wird, wobei die Zeitkonstanten von Backus (1983) den Ausgangspunkt bilden. Es existieren statistische Modelle für das Erdmagnetfeld, die die Gauß-Koeffizienten des Restfeldes als unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen behandeln (Constable und Parker, 1988; Walker und Backus, 1997). Diese werden in Kapitel 4 zu stationären Gauß-Prozessen erweitert, die durch eine Korrelationszeit charakterisiert werden und als Modell für die zeitabhängige Anregung an der Kern-Mantel-Grenze dienen. Wenn man an der Kern-Mantel-Grenze einen stationären Gauß-Prozeß vorgibt, erhält man dann an der Oberfläche ebenfalls einen stationären Gauß-Prozeß? Und wie unterscheiden sich diese Prozesse gegebenenfalls? Worin drückt sich der Einfluß des Mantels aus? Zunächst werden die genannten Fragen an Schichtmodellen für eine radialsymmetrische Leitfähigkeitsverteilung untersucht. Dabei wird zugleich die Behandlung eines Mantels vorbereitet, in den eine infinitesimal dünne, lateral heterogene Schicht in der Nähe der Kern-Mantel-Grenze eingebettet ist (Kapitel 5). Können laterale Leitfähigkeitskontraste dazu führen, daß die Säkularvariation des Restfeldes im Bereich des Pazifiks stärker gedämpft wird als in anderen Regionen? Kann die Westdrift zusammen mit einer heterogenen Schicht zu beobachtbaren Effekten führen? Führt eine erhöhte elektrische Leitfähigkeit im pazifischen Raum dazu, daß die Polwanderkurven gehäuft um diese Region herumlaufen, weil die sich bewegenden Pole aus dem Bereich erhöhter elektrischer Leitfähigkeit herausgedrängt werden? Kann ein Leitfähigkeitskontrast statistisch signifikante Unterschiede zwischen der atlantischen und der pazifischen Hemisphäre herbeiführen? Oder lassen sich die Unterschiede zwischen den Hemisphären durch zufällige Variationen erklären?

Diese Arbeit versucht, Antworten auf diese Fragen zu finden oder Wege aufzuzeigen, wie man mit verbessertem Wissen über die Säkularvariation und die elektrische Leitfähigkeit – vor allem in der D''-Schicht – zu Antworten gelangen kann.

Kapitel 1

Elektrische Leitfähigkeit des Erdmantels

Der Erdkörper wird in Kruste, Mantel und Kern gegliedert (siehe Abbildung 1.1). Der Radius der Erde beträgt $a = 6371$ km, der des Erdkerns $c = 3481$ km. Für die Angabe der Lage von Schichtgrenzen wird sowohl der Radius r als auch die Tiefe $z = a - r$ verwendet.

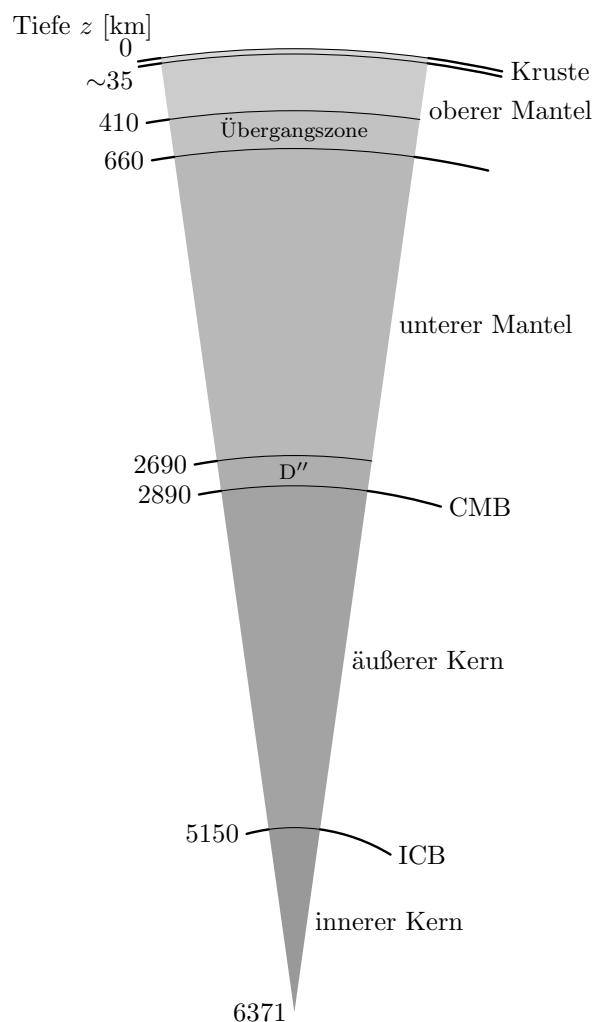


Abbildung 1.1: Gliederung des Erdkörpers: Dargestellt sind die wichtigsten Bereiche und Grenzen der festen Erde zusammen mit ungefähren Tiefenangaben. Die Abkürzungen CMB und ICB stehen für *core-mantle boundary* (Kern-Mantel-Grenze) bzw. *inner-core boundary* (innere Kerngrenze).

1 Elektrische Leitfähigkeit des Erdmantels

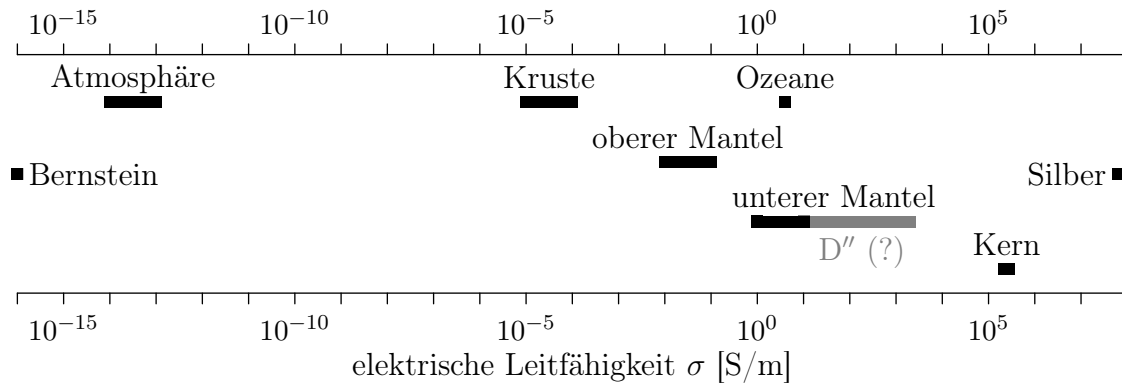


Abbildung 1.2: Die schematische Übersicht zeigt, wie unterschiedlich die elektrische Leitfähigkeit in den verschiedenen Bereichen der Erde ist. Zum Vergleich sind die Leitfähigkeiten von Bernstein, einem Isolator, und Silber, einem sehr guten Leiter, eingetragen. Über die elektrische Leitfähigkeit der D''-Schicht gibt es unterschiedliche Hypothesen, vgl. Abschnitt 1.3.3.

Erdmantel und -kruste liegen zwischen dem metallisch leitenden Kern, dessen elektrische Leitfähigkeit bis zu $2.76 \cdot 10^5$ S/m beträgt, und der Erdatmosphäre, die mit einer elektrischen Leitfähigkeit von ca. 10^{-14} S/m als Isolator angesehen werden kann, vgl. Abbildung 1.2. An der Erdoberfläche bestehen große Kontraste zwischen der elektrischen Leitfähigkeit der Ozeane von 4 S/m und der Kruste von teils nur 10^{-5} S/m. Die elektrische Leitfähigkeit des oberen Mantels liegt in der Größenordnung von 10^{-2} S/m. Im unteren Mantel im Bereich von 660 km bis etwa 2700 km Tiefe liegt sie in einer Größenordnung von 1 S/m bis 10 S/m. Sie hängt zum einen von der chemischen Zusammensetzung und der Kristallstruktur ab, die insbesondere in der Kruste und im oberen Mantel variieren, zum anderen ist sie eine Funktion der Temperatur und des Drucks. Daher kann die Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit als Funktion der Tiefe ihrerseits Hinweise über die Verhältnisse im Mantel liefern.

Die elektrische Leitfähigkeit der ca. 200 km dicken D''-Schicht des unteren Mantels, die direkt an den Kern grenzt, wird in der Literatur kontrovers diskutiert. Sie ist dort vermutlich wesentlich größer als im übrigen Mantel und weist zudem starke laterale Variationen auf. Eine Schicht mit hoher elektrischer Leitfähigkeit ermöglicht eine elektromagnetische Kopplung zwischen Kern und Mantel, verbunden mit einem Drehimpulsaustausch, der dekadische Tageslängenänderungen erklären kann (z. B. Holme, 1998). Die kürzeren jährlichen bzw. halbjährlichen Schwankungen der Tageslänge werden im wesentlichen mit Änderungen in der atmosphärischen Zirkulation erklärt, und die säkulare Zunahme der Tageslänge ist auf die Gezeitenreibung zurückzuführen.

Bei der Diskussion insbesondere der D''-Schicht steht häufig nicht die elektrische Leitfähigkeit σ im Vordergrund, sondern der elektrische Leitwert S einer Schicht, die durch die Radien r_0 und r_1 festgelegt ist und deren elektrische Leitfähigkeit σ nur vom Radius r abhängt. Der Leitwert wird definiert als integrierte Leitfähigkeit,

$$S := \int_{r_0}^{r_1} \sigma(r) dr, \quad (1.1)$$

mit $r_0 < r_1$. Gerade im Zusammenhang mit der Kern-Mantel-Kopplung wird der Leitwert verwendet, weil es in diesem Fall keine Rolle spielt, ob es sich um eine dicke Schicht mit niedriger Leitfähigkeit oder eine dünne Schicht mit hoher Leitfähigkeit handelt, solange der Leitwert der gleiche ist.

Das Erdmagnetfeld entsteht im flüssigen äußeren Kern durch einen Dynamoprozeß. Zeitliche Magnetfeldänderungen an der Kern-Mantel-Grenze unterliegen im Mantel einer elektromagnetischen Dämpfung, so daß sie zeitverzögert und geglättet an der Erdoberfläche registriert werden. Die Details dieses Prozesses werden in den folgenden Kapiteln untersucht. Die elektromagnetische Dämpfung muß berücksichtigt werden, wenn man die magnetische Flußdichte, die als Funktion der Zeit an der Erdoberfläche registriert wird, nach unten an die Kern-Mantel-Grenze fortsetzen möchte. Dieses Problem tritt beispielsweise bei der Untersuchung der Strömung an der Oberfläche des flüssigen äußeren Kerns auf.

Da die elektrische Leitfähigkeit in der Erde von deren Aufbau und Zusammensetzung abhängt, gibt Abschnitt 1.1 zunächst einen Überblick über die feste Erde. Dabei wird auch auf die Temperatur und den Druck eingegangen, die für die elektrische Leitfähigkeit im Erdmantel ebenfalls wichtig sind. Es handelt sich um Themen aktueller und reger Forschung, und so stößt man im Detail auf unterschiedliche Angaben, beispielsweise weichen Temperaturmodelle für die Erde um weit mehr als 100 K voneinander ab. Die Methoden zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit in der Kruste und im Mantel werden in Abschnitt 1.2 kurz vorgestellt. Anschließend werden in Abschnitt 1.3 exemplarische Ergebnisse für Erdkruste und oberen Mantel, unteren Mantel, D''-Schicht sowie den äußeren Kern angegeben. Abschließend stellt Abschnitt 1.4 Leitfähigkeitsmodelle für den Mantel vor, die in den folgenden Kapiteln für die genauere Untersuchung der Diffusion des Magnetfeldes durch den Mantel verwendet werden.

1.1 Aufbau der Erde

Der Aufbau der Erde ist in Abbildung 1.1 zu sehen. Die oberste Schicht ist die Erdkruste. Die ozeanische Kruste ist ungefähr 8 km mächtig, während die kontinentale Kruste in der Regel 35 km bis 40 km mächtig ist und unter großen Gebirgen eine Dicke von 60 km erreichen kann. Kruste und Mantel werden voneinander durch die Mohorovičić-Diskontinuität, kurz Moho genannt, abgegrenzt. Der Erdmantel nimmt etwa 82 % des Volumens der Erde ein und wird in den oberen und den unteren Mantel unterteilt. Der obere Mantel endet mit einer Übergangszone, die durch zwei wichtige mineralogische Phasenübergänge in 410 km und 660 km Tiefe begrenzt ist (z. B. Anderson, 1989; Bott, 1982). Diese Phasenübergänge werden durch die Druckzunahme hervorgerufen und finden in einer eng begrenzten Schicht von jeweils nur 5 km Dicke statt (Jeanloz, 1993). Den Abschluß des unteren Mantels bildet die etwa 200 km mächtige D''-Schicht. Als Bezeichnung der Grenze zwischen dem flüssigen äußeren Kern und dem Mantel in einer Tiefe von 2890 km ist die Abkürzung CMB für *core-mantle boundary* gebräuchlich, auch die Bezeichnung Gutenberg-Wiechert-Diskontinuität findet sich in der Literatur (z. B. Fowler, 1990; Greulich, 1998). Entsprechend wird die Grenze zwischen dem flüssigen äußeren und dem festen inneren Kern in 5150 km Tiefe als ICB (*inner-core boundary*) bezeichnet.

Bezeichnung nach Bullen	Tiefenbereich in km	Kugelschicht
A	0 – 33	Kruste
B	33 – 410	Oberer Mantel
C	410 – 1000	
D'	1000 – 2700	Unterer Mantel
D''	2700 – 2900	
E	2900 – 4980	Äußerer Kern
F	4980 – 5120	Übergangsschicht
G	5120 – 6370	Innerer Kern

Tabelle 1.1: Die Gliederung des Erdkörpers nach K. E. Bullen (siehe Kertz, 1969) weicht von der heute gebräuchlichen ab, aber die Bezeichnung der D''-Schicht ist geblieben.

Diese Gliederung der Erde ist im wesentlichen aus seismischen Untersuchungen bekannt. Die Geschwindigkeit, mit der sich seismische Wellen in der Erde ausbreiten, wird unter anderem beeinflusst von der chemischen und mineralogischen Zusammensetzung, dem Druck und der Temperatur sowie dem Auftreten partieller Schmelzen. Die oben angegebene Gliederung richtet sich hauptsächlich nach der Zusammensetzung, die sich in Kruste, Mantel und Kern deutlich unterscheidet. Direkte Hinweise auf die Bestandteile des Mantels liefern Fremdgesteinseinschlüsse in Magmatit, sogenannte Xenolithe, bei denen es sich um Material aus dem Mantel handelt. Meteoriten liefern weitere wichtige Informationen, weil sie den mineralogischen Stoffbestand des Sonnennebels bewahrt haben, aus dem sich die Erde gebildet hat (siehe z. B. Strobach, 1991; Stacey und Davis, 2008).

Die Bezeichnung D''-Schicht stammt aus der Gliederung des Erdkörpers nach Bullen (s. Tabelle 1.1). Anfangs wurde der gesamte untere Mantel mit D bezeichnet, und erst nachträglich wurde eine weitere Unterteilung in D' und D'' eingeführt (Wyssession, 1995). Nur die Bezeichnung D''-Schicht ist noch immer gebräuchlich.

Neben der Einteilung in Kruste und oberen Mantel wird auch eine Gliederung in Lithosphäre und Asthenosphäre verwendet, die sich an den rheologischen Eigenschaften orientiert. Die eher spröde und feste Lithosphäre ist in ozeanischen Gebieten etwa 80 km und in kontinentalen Gebieten 100 km dick und umfaßt damit die Kruste und Teile des obersten Mantels. Die weichere Asthenosphäre, die sich nach unten anschließt, reicht bis in eine Tiefe von ca. 220 km. Sie besitzt eine relativ geringe Viskosität, weil sich die Temperatur der Schmelztemperatur stark nähert und zur teilweisen Aufschmelzung führt. Seismische Wellen breiten sich in der Asthenosphäre langsamer aus und werden stärker gedämpft.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten v_p der primären und v_s der sekundären seismischen Wellen hängen ab von der Dichte ϱ , dem Kompressionsmodul K und dem Schub-

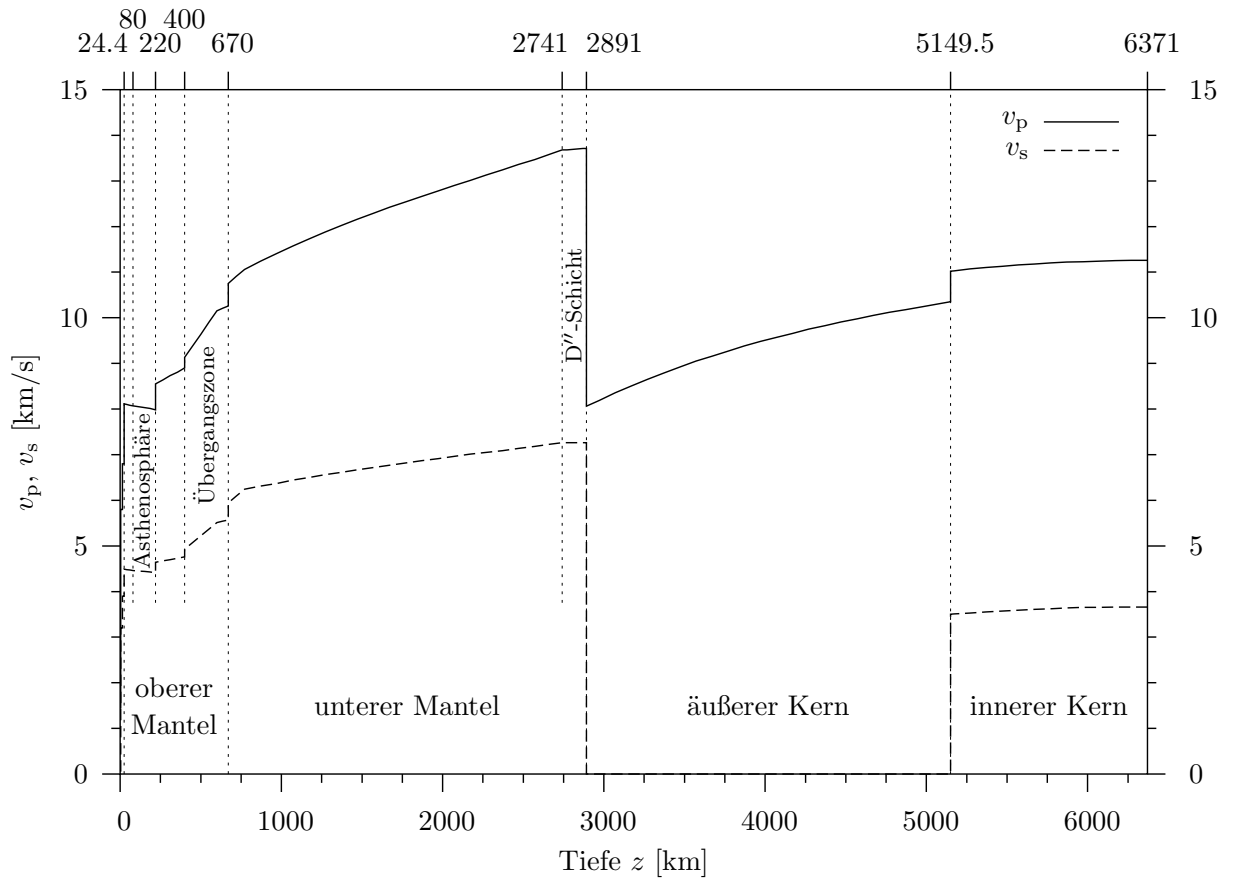


Abbildung 1.3: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit seismischer Wellen in der Erde ist aufgetragen über der Tiefe. Nicht beschriftet sind die Erdkruste, die im *Preliminary Reference Earth Model* (Dziewonski und Anderson, 1981) bis in 24.4 km Tiefe reicht, und die Lithosphäre, die sich von der Oberfläche bis in eine Tiefe von 80 km erstreckt.

modul G (siehe z. B. Kertz, 1969; Stacey und Davis, 2008):

$$v_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad \text{und} \quad v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (1.2)$$

Bei der schnelleren primären Welle handelt es sich um eine longitudinale, bei der langsameren sekundären Welle um eine transversale Welle. Die Abhängigkeiten der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten vom Radius r bzw. von der Tiefe z , wie in Abbildung 1.3 dargestellt, lassen sich aus Laufzeitkurven seismischer Wellen ermitteln, die an der Oberfläche gemessen werden (z. B. Kertz, 1969). Der Abbildung 1.3 liegen die Werte des *Preliminary Reference Earth Model* (PREM) zugrunde, siehe Dziewonski und Anderson (1981) oder Anderson (1989). Im flüssigen äußeren Kern können sich keine transversalen Wellen fortpflanzen, wegen $G = 0$ ist auch $v_s = 0$.

An Grenzflächen in der Erde kommt es darüber hinaus zur Brechung und Reflexion von Wellen. Zusätzliche Informationen liefern die Eigenschwingungen der Erde, die im Gegensatz zu den seismischen Geschwindigkeiten auch von der Schwerebeschleunigung

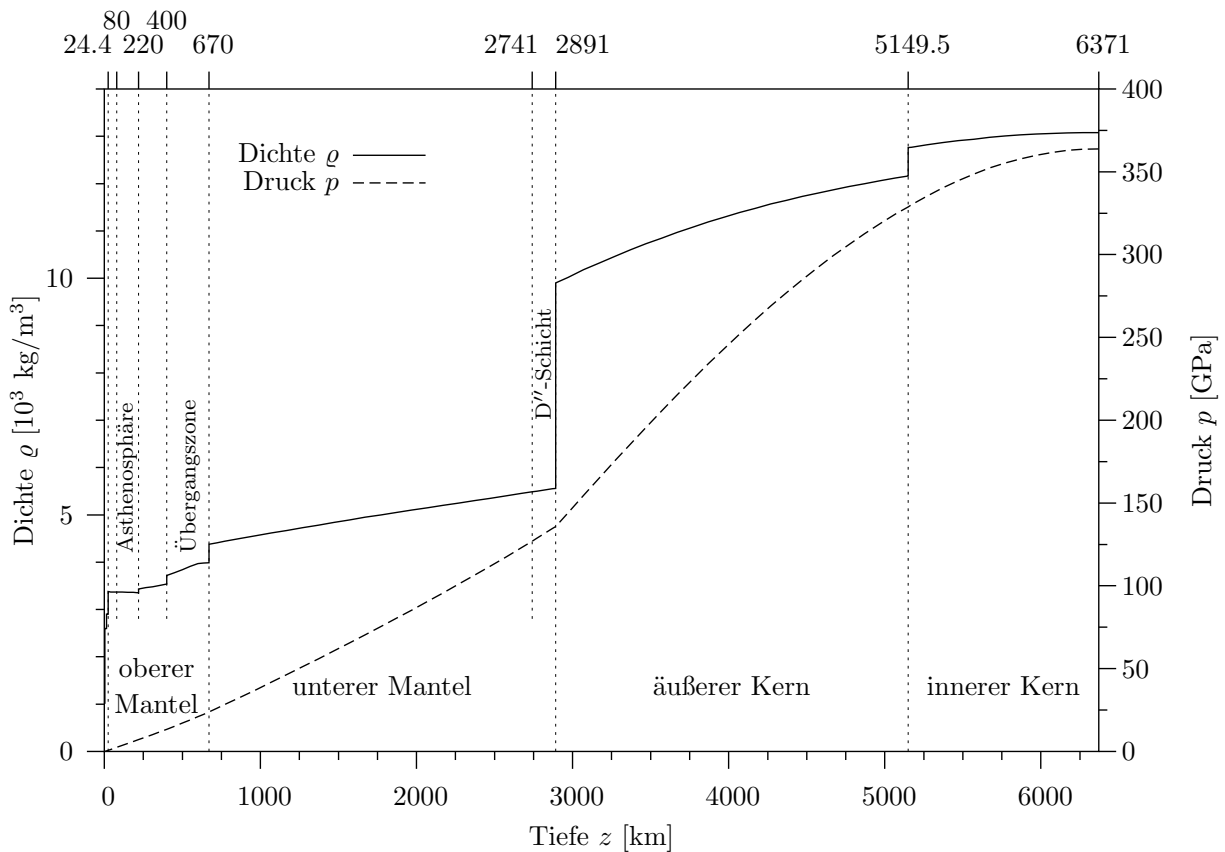


Abbildung 1.4: Die Graphen geben die Dichte ρ und den Druck p als Funktion der Tiefe z aus dem *Preliminary Reference Earth Model* (Dziewonski und Anderson, 1981) wieder.

$g(r)$ als Funktion des Radius r abhängen. Hieraus können die Dichte und der Druck im Erdinneren abgeleitet werden, wobei das Dichtemodell auch die Gesamtmasse und das Trägheitsmoment der Erde korrekt wiedergeben muß. Im Gegensatz zu den Ausbreitungsgeschwindigkeiten der seismischen Wellen und der Dichte ist der Druck eine stetige Funktion der Tiefe, weil er sich für jeden Ort aus der Gewichtskraft der darüber liegenden Massen ergibt, siehe Abbildung 1.4. Im unteren Mantel steigt der Druck nahezu linear von 23 GPa in einer Tiefe von 660 km auf 136 GPa an der Kern-Mantel-Grenze.

Der Dichteverlauf in der Erde weist mehrere Sprünge auf, siehe Abbildung 1.4. Der Dichtesprung an der Mohorovičić-Diskontinuität, der Grenze zwischen Kruste und Mantel, von etwa $3.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ auf $3.3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ist verhältnismäßig klein. Der obere Mantel setzt sich nach dem Pyrolit-Modell (z. B. Stacey und Davis, 2008; Strobach, 1991) aus ca. 60 % Olivin, $(\text{Mg, Fe})_2\text{SiO}_4$, 30 % Pyroxen, $(\text{Mg, Fe})\text{SiO}_3$, und 10 % Granat, $(\text{Fe, Mg, Ca})_3\text{Al}_2\text{Si}_3\text{O}_{12}$, zusammen. Die Diskontinuität in 410 km Tiefe entsteht durch den Phasenübergang des Olivins in die Spinell-Struktur, die eine größere Packungsdichte besitzt. Bei 660 km wird Olivin in Pyroxen, $(\text{Mg, Fe})\text{SiO}_3$, in Perowskit-Struktur und Magnesiowüstit, $(\text{Mg, Fe})\text{O}$, umgewandelt. Der untere Mantel besteht hauptsächlich aus Pyroxen und Magnesiowüstit, wobei Pyroxen mit 75 % – 80 % deutlich dominiert. Der größte Dichteunterschied von $\Delta\rho = 4.3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ tritt an der Kern-Mantel-Grenze auf und ist

durch die unterschiedliche chemische Zusammensetzung zu erklären. Der flüssige äußere Kern setzt sich im wesentlichen aus Eisen (79 %), Schwefel (9 %), Nickel (6.5 %) und Sauerstoff (5 %) zusammen, vgl. Stacey und Davis (2008). Der innere Kern wächst durch die allmähliche Erstarrung des flüssigen äußeren Kerns, wobei sich die Zusammensetzungen der festen und der flüssigen Phase unterscheiden, siehe Merrill et al. (1996). Daraus ergibt sich ein Dichteunterschied von $\Delta\rho = 0.6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ (PREM) bis $\Delta\rho = 0.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ (Masters und Gubbins, 2003).

Der Temperaturverlauf im Erdinneren (siehe Abbildung 1.5) ist nur sehr ungenau bekannt. Vernünftige Annahmen über die Temperaturen gibt es für die Tiefen, in denen Phasenübergänge auftreten. Aus Experimenten bei hohen Drücken und hohen Temperaturen kennt man die Bedingungen, unter denen diese Phasenübergänge auftreten. Allerdings beruht die Zusammensetzung der Proben auch auf Annahmen (z. B. Anderson, 1989). Schätzungen gibt es auch für die Temperatur an der Grenze zwischen äußerem und innerem Kern (z. B. Boehler, 1996), da an dieser Stelle die Schmelztemperatur erreicht wird. Der Temperaturverlauf im gesamten Erdinneren kann dann mit zusätzlichen Annahmen über den Wärmetransport abgeleitet werden, der sowohl im Mantel als auch im äußeren Kern im wesentlichen durch Konvektion erfolgt. Daher wird angenommen, daß in diesen Bereichen der Temperaturverlauf sehr nahe am adiabatischen Verlauf liegt (Strobach, 1991). Besonders auffällig ist der große Temperaturgradient in der D''-Schicht. Dort fällt die Temperatur mit wachsendem Abstand zur Kern-Mantel-Grenze schnell ab. Strobach (1991) gibt eine exponentielle Temperaturabnahme um 840 K mit einer Skalenhöhe von 73 km an, Boehler (1996) nimmt eine noch stärkere Temperaturabnahme um mindestens 1400 K an. Die Temperatur des Kerns unmittelbar an der Kern-Mantel-Grenze beträgt nach Boehler $4000 \text{ K} \pm 200 \text{ K}$, das sind etwa 500 K mehr als Strobach angibt.

Der Aufbau der Erde weicht in einigen Bereichen erheblich von dem bisher betrachteten radialsymmetrischen Modell ab. Offensichtlich sind die Abweichungen an der Erdoberfläche. Die ozeanische und die kontinentale Kruste unterscheiden sich sowohl in der Dicke als auch in der Dichte. Neben der Kruste ist die D''-Schicht eine weitere Region, in der starke laterale Inhomogenitäten auftreten. Ergebnisse der seismischen Tomographie zeigen Bereiche, in denen die Geschwindigkeit der primären Welle um bis zu 10 % und der sekundären Welle um bis zu 30 % reduziert ist. Diese Regionen werden als *ultra low velocity zones* (ULVZ) bezeichnet. Für den größten Teil des Erdmantels ist jedoch das radialsymmetrische Modell eine sehr gute Näherung.

1.2 Methoden zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit

Es gibt zwei komplementäre Vorgehensweisen zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit des Mantels in der elektromagnetischen Tiefenforschung. Die eine nutzt externe Magnetfeldänderungen, während die andere versucht, aus Magnetfeldänderungen internen Ursprungs Rückschlüsse auf die elektrische Leitfähigkeit im Mantel zu ziehen. Darüber hinaus verwendet man Untersuchungen der elektromagnetischen Kern-Mantel-Kopplung

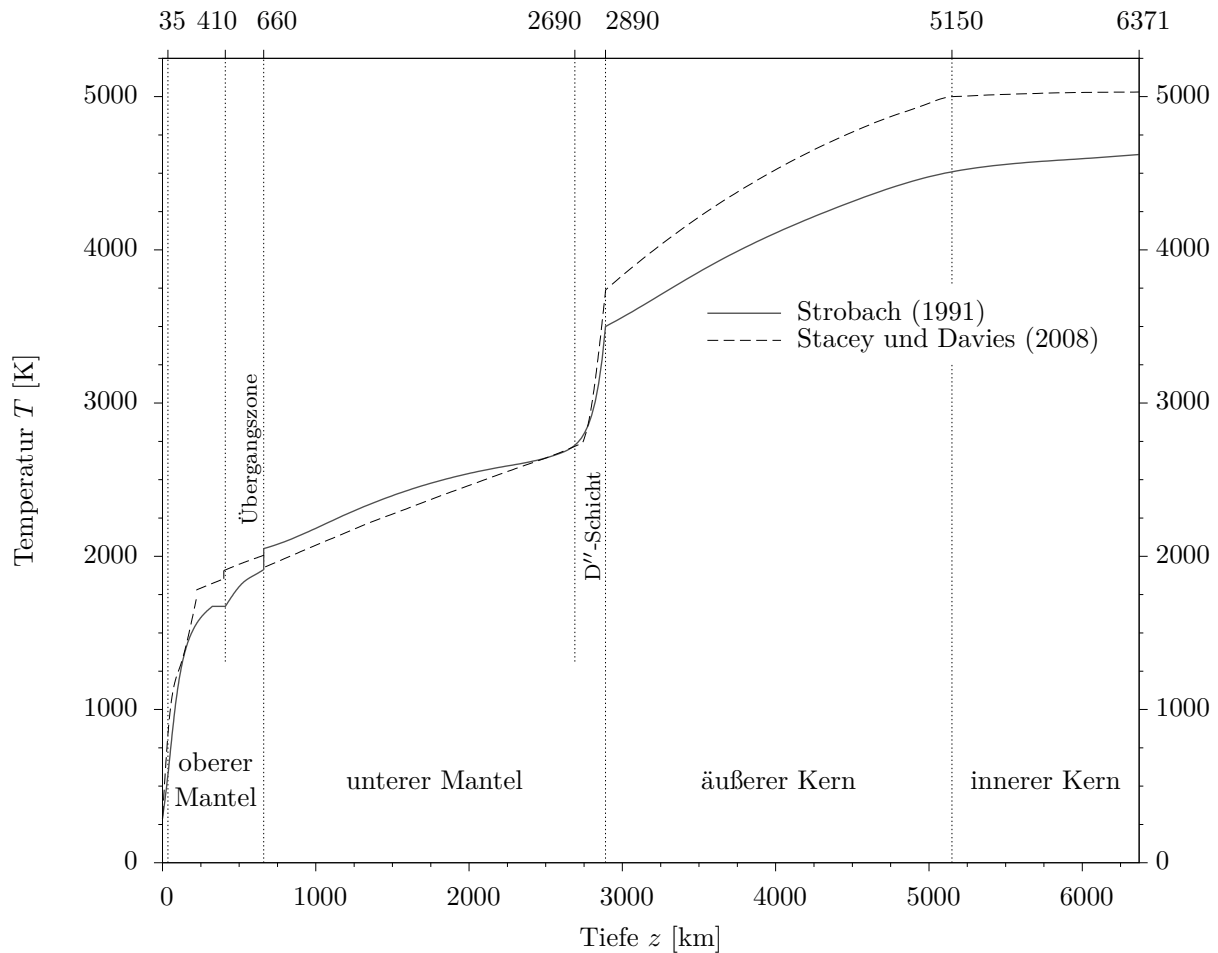


Abbildung 1.5: Die Temperaturen im Erdinneren sind nur mittels Zusatzannahmen abschätzbar. Die hier dargestellten Temperaturverläufe nach Strobach (1991) sowie Stacey und Davis (2008) weichen teilweise erheblich voneinander ab. Der Temperatursprung in 660 km Tiefe hat sogar unterschiedliche Vorzeichen, weil es verschiedene Ansichten darüber gibt, ob der Phasenübergang exo- oder endotherm verläuft.

und festkörperphysikalische Messungen an Proben, deren Zusammensetzung der des Mantels entsprechen.

1.2.1 Magnetotellurik

In der Magnetotellurik, der ersten Methode, werden die Variationen des äußeren Feldes an magnetisch ruhigen Tagen (Sq) oder während magnetischer Stürme (Dst) genutzt. Diese zeitlichen Magnetfeldänderungen induzieren Ströme in der Erde, die wiederum ein Magnetfeld erzeugen. Kennt man das anregende Magnetfeld und die Antwort der Erde als Funktionen der Frequenz, dann kann man daraus auf die elektrische Leitfähigkeit schließen (z. B. Parkinson und Hutton, 1989). Mit Inversionsverfahren wird versucht, eine Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit in der Erde zu finden, die mit den gemessenen

Daten verträglich ist. Im Fall einer eindimensionalen Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(r)$ und fehlerfreier Daten im gesamten Frequenzbereich $0 \leq f \leq \infty$ existiert eine eindeutige Lösung des Inversionsproblems (z. B. Parker, 1970). Diese Eindeutigkeit der Lösung ist eine bemerkenswerte Eigenschaft, weil viele andere geophysikalische Probleme keine eindeutigen Lösungen besitzen. Zum Beispiel können in der Magnetik oder in der Gravimetrie sehr unterschiedliche Modelle die gleichen Daten erklären.

Sehr häufig sieht man in der Literatur einen Ansatz, bei dem die Leitfähigkeit von innen nach außen mit einer festen Potenz γ abnimmt:

$$\sigma(r) = \sigma_0 \left(\frac{r}{c} \right)^{-\gamma}, \quad c \leq r \leq a, \quad (1.3)$$

wobei a der Erdradius und c der Kernradius ist, während σ_0 und γ zu bestimmende Parameter sind (z. B. Parkinson und Hutton, 1989). Es sind eher mathematische als physikalische Gründe, die zur Wahl dieses Ansatzes geführt haben. Ein anderer Modelltyp besteht aus Schichten mit jeweils konstanter elektrischer Leitfähigkeit. Dicke und Leitfähigkeit der Schichten sind dabei die Parameter, die so zu wählen sind, daß die Daten möglichst gut erklärt werden. Als Grenzfall ergibt sich ein Modell, das aus einer endlichen Anzahl sehr dünner Schichten mit sehr hoher elektrischer Leitfähigkeit besteht. Zwischen diesen Schichten sind große nichtleitende Bereiche. Ein solches Modell paßt gegebene Daten zwar am besten an, ist aber unphysikalisch.

Die Erkundung der elektrischen Leitfähigkeit des Erdmantels mit Hilfe äußerer Anregung ist dadurch beeinträchtigt, daß nur ein eingeschränkter Periodenbereich zur Verfügung steht. Zum Beispiel beschränkt Parker (1970) seine Untersuchung auf den Periodenbereich von 2 d bis 100 d. Für kurze Perioden können Effekte durch oberflächennahe Leitfähigkeitsvariationen stören, wie z. B. die Nähe von Ozeanen, so daß der verwendbare Periodenbereich nach unten begrenzt ist. Bei langen Perioden macht sich die Säkularvariation störend bemerkbar, die internen Ursprungs ist. Dies begrenzt den verwendbaren Periodenbereich nach oben. Informationen über große Tiefen sind in den Daten für lange Perioden konzentriert, so daß man die elektrische Leitfähigkeit mit dieser Methode nur bis in Tiefen von ca. 2000 km bestimmen kann. Ein anderes Problem hängt damit zusammen, daß bei der Inversion gemessener Daten in der Regel die Tiefenauflösung mit zunehmender Tiefe abnimmt, so daß es unmöglich ist, eine dünne Schicht mit relativ hoher Leitfähigkeit, wie z. B. die D'' -Schicht, in unmittelbarer Nachbarschaft des metallisch leitenden Kerns aufzulösen. Parker (1970) zeigt für seine Inversionsmethode, daß die Leitfähigkeit sehr nahe an der Kern-Mantel-Grenze auch dann kaum aufgelöst werden kann, wenn die Antwort des Mantels für Frequenzen mit ausreichender Eindringtiefe bekannt ist.

1.2.2 Säkularvariation

Bei der zweiten Methode wird die elektrische Leitfähigkeit im unteren Mantel mit Hilfe der Säkularvariation erforscht. Die Magnetfeldänderungen diffundieren von der Kern-Mantel-Grenze durch den Mantel und die Kruste an die Erdoberfläche, wo sie beobachtet werden. Anders als in der Magnetotellurik kennt man in diesem Fall das anregende Feld nicht und kann nur Annahmen über den zeitlichen Verlauf des Magnetfeldes an der

Kern-Mantel-Grenze machen. Aus dem beobachteten Periodenbereich der Säkularvariation kann man beispielsweise abschätzen, ab welcher Frequenz der Mantel aufgrund seiner elektrischen Leitfähigkeit die Säkularvariation abschirmt. Eine andere Möglichkeit besteht darin, eine instantane Magnetfeldänderung an der Kern-Mantel-Grenze anzunehmen, für deren mathematische Beschreibung die Diracsche δ -Funktion oder die Heaviside-Funktion verwendet wird. Diese Änderung kommt zeitverzögert und geglättet an der Erdoberfläche an. Dabei sind Verzögerung und Glättung um so ausgeprägter, je größer die elektrische Leitfähigkeit ist (Backus, 1983).

Geomagnetische Jerks, die auch als Säkularvariations- oder geomagnetische Impulse bezeichnet werden, sind die schnellsten Magnetfeldänderungen internen Ursprungs. Bei den Jerks handelt es sich um Änderungen in der Steigung der Säkularvariation innerhalb von einigen Monaten oder wenigen Jahren. Die zeitliche Ableitung der Säkularvariation, die Säkularbeschleunigung genannt wird, weil es sich um die zweite Ableitung des Magnetfeldes nach der Zeit handelt, ändert sich beinahe sprunghaft. Als Beispiel zeigt Abbildung 1.6 die Jahresmittelwerte Y_a der Ostkomponente Y des in Niemegk gemessenen Erdmagnetfeldes zusammen mit der daraus bestimmten Säkularvariation. Die Jerks von 1969, 1978 und 1991 sind deutlich in der Säkularvariation zu erkennen und trennen Abschnitte mit nahezu konstanter Säkularbeschleunigung; das ist ein Umstand, der von Bloxham et al. (2002) als Hinweis auf ihren internen Ursprung gewertet wird. Jerks sind vor allem in den Daten europäischer Observatorien aufgefallen und sind in der Regel auf die Y -Komponente beschränkt (z. B. Bloxham et al., 2002; Nagao et al., 2003). Malin und Hodder (1982) haben mit einer Kugelfunktionsentwicklung den internen und externen Anteil des Jerks von 1969 untersucht und kamen zu dem Ergebnis, daß der interne Anteil deutlich überwiegt. Auch Ducruix et al. (1980) vertreten die Ansicht, daß der Jerk von 1969 internen Ursprungs ist. Als Argument für die Annahme eines externen Ursprungs wurde zuvor mehrfach eine Korrelation zwischen Jerks und dem Sonnenfleckenzyklus angeführt. Im 20. Jahrhundert gab es neun Jerks in den Jahren 1901, 1913, 1925, 1932, 1949, 1969, 1978, 1991 und 1999 (Alexandrescu et al., 1996; Bloxham et al., 2002), von denen einige global aufgetreten sind, während andere nicht überall auf der Erde beobachtet wurden. Selbst die Jerks von 1969 und 1978 mit globaler Ausdehnung erscheinen in der nördlichen Hemisphäre etwa zwei Jahre früher als in der südlichen (Le Huy et al., 1998). Holme und de Viron (2005) glauben hingegen nicht, daß sich diese Jerks mit einem Zeitunterschied von mehreren Jahren in verschiedenen Teilen der Erde bemerkbar machen, sondern gehen davon aus, daß es sich dabei um verschiedene Ereignisse handelt.

1.2.3 Weitere Methoden

Neben der elektromagnetischen Tiefenforschung gibt es noch andere Forschungsgebiete, die Aussagen über die elektrische Leitfähigkeit im Mantel liefern, nämlich die Untersuchung der Kern-Mantel-Kopplung und Hochdruckexperimente.

Kern-Mantel-Kopplung

Zwischen Änderungen in der Erdrotation und Änderungen im Magnetfeld scheint ein Zusammenhang zu bestehen (z. B. Strobach, 1991). Der Vektor, der die Drehung der Erde

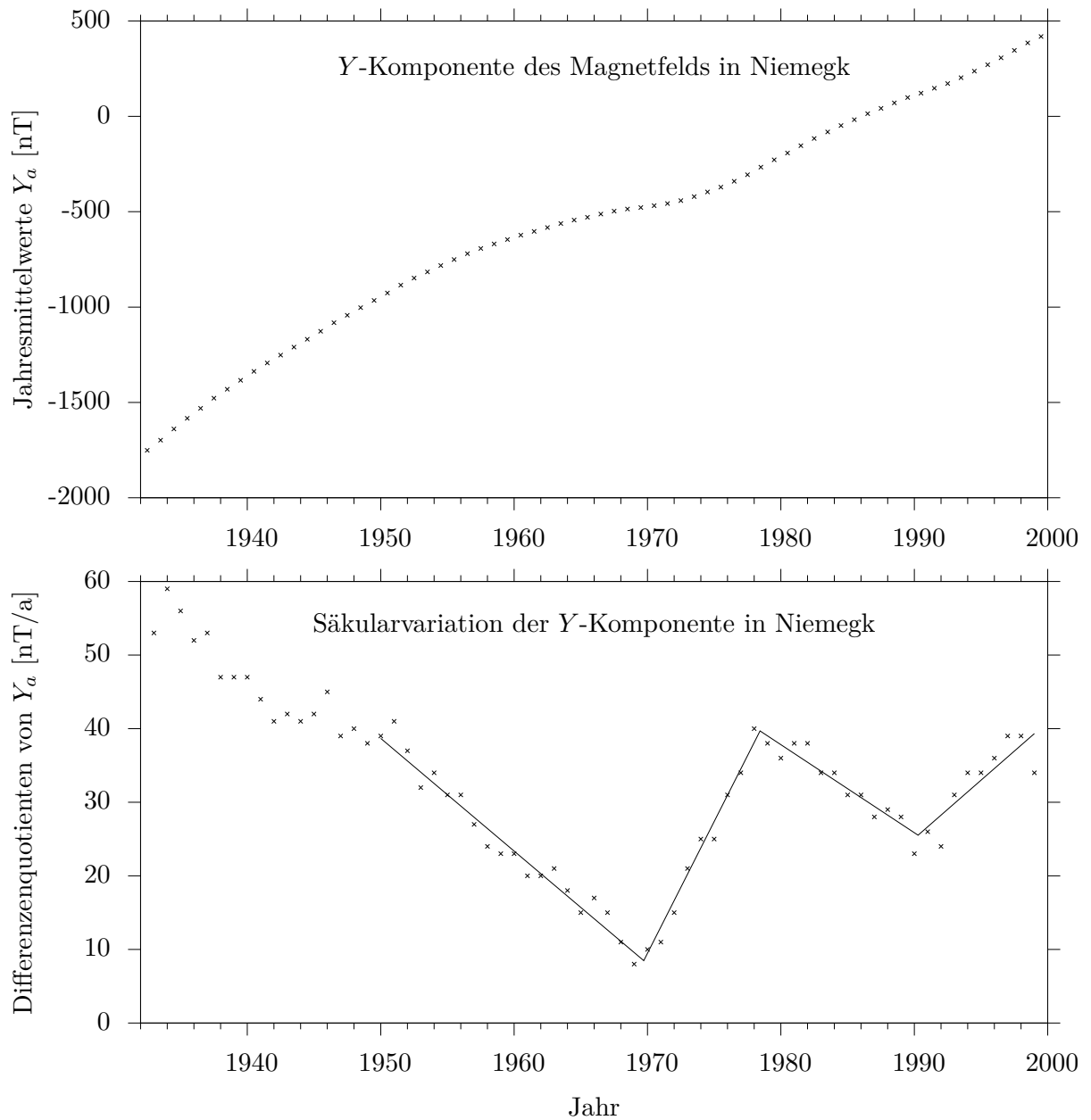


Abbildung 1.6: Die obere Abbildung zeigt die Jahresmittelwerte Y_a der im Geomagnetischen Observatorium Niemegk gemessenen Y-Komponente des Magnetfeldes. Unten ist die Säkularvariation aufgetragen, die als Differenzenquotient aus den Y_a berechnet ist. Zur Verdeutlichung der abrupten Steigungsänderung ist ein Polygonzug eingezeichnet, der abschnittsweise an die Differenzenquotienten angepaßt ist (Abbildung nach Ducruix et al., 1980).

beschreibt, läßt sich festlegen durch die Rotationsperiode und die Lage der Rotationsachse bezüglich der Erdoberfläche. Variationen der Rotationsperiode werden als Tageslängenänderungen bezeichnet, Änderungen der Lage der Rotationsachse als Polhöenschwankung oder *Chandler wobble*, (z. B. Kertz, 1969). Die dekadischen Tageslängenänderungen, die sich über einen Zeitraum von wenigen Jahrzehnten auf mehrere Millisekunden aufsummieren können, werden auf den Drehimpulsaustausch zwischen dem Kern und dem Mantel zurückgeführt. Für den Mechanismus der Kern-Mantel-Kopplung gibt es verschiedene Möglichkeiten. In Betracht gezogen werden viskose Kopplung, Kopplung durch Gravitationskräfte (aufgrund von lateralen Inhomogenitäten in der Dichte), topographische Kopplung und elektromagnetische Kopplung. Gegen die topographische Kopplung wird angeführt, daß die aus ihr resultierenden Drehmomente um zwei Größenordnungen zu stark ausfallen würden (Jault und Le Mouél, 1991). Strobach (1991) stellt fest, daß sich die beobachteten Tageslängenänderungen am besten durch die elektromagnetische Kern-Mantel-Kopplung erklären lassen, und sieht einen Zusammenhang zwischen der Westdrift des exzentrischen magnetischen Dipols und der Tageslänge, wobei die Änderungen in der Driftrate den Tageslängenänderungen um etwa 10 a hinterherhinken. Stewart et al. (1995) finden in ihrer Untersuchung eine Zeitdifferenz von 6 a. Holme (1998) stellt Modelle der Strömung an der Kern-Mantel-Grenze vor, die sowohl die Tageslängenänderungen als auch die Säkularvariation erklären können. Aber nicht nur die Tageslängenänderungen, sondern auch die Polhöenschwankungen weisen Korrelationen mit den Magnetfeldänderungen auf. Durch eine detaillierte Analyse der Tageslängenänderungen kommen Holme und de Viron (2005) zu dem Ergebnis, daß Schwankungen in der Tageslängenänderung und Jerks unmittelbar zusammenhängen und schnell aufeinanderfolgen. Sie gehen von einer Zeitverzögerung in der Größenordnung von einem Jahr aus. Gibert et al. (1998) finden durch eine Wavelet-Analyse 10 Sprünge in der Polhöenschwankung während des 20. Jahrhunderts. Sie kommen zum Ergebnis, daß auf geomagnetische Jerks innerhalb von 3 a ein Phasensprung in der Polhöenschwankung folgt.

Die Untersuchung der elektromagnetischen Kern-Mantel-Kopplung liefert eine untere Grenze für den Leitwert (z. B. Holme, 1998). Wenn äußerer Kern und Mantel mit geringfügig unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten rotieren, dann bewegt sich im Bezugssystem des Kerns der Mantel durch das Magnetfeld des Kerns. Im elektrisch leitenden Mantel werden dadurch Ströme induziert, die ihrerseits mit einem Magnetfeld verknüpft sind, das nach der Lenzschen Regel seiner Ursache entgegenwirkt. Auf diese Weise wirkt zwischen dem äußeren Kern und dem Mantel ein Drehmoment, das letztlich zu Tageslängenänderungen führt. Diese Kopplung kann die beobachteten Tageslängenänderungen aber nur dann erklären, wenn das Drehmoment und somit die Ströme im Mantel stark genug sind. Der Leitwert des untersten Mantels darf also nicht zu klein sein.

Hochdruckforschung

Die andere wichtige Methode zur Untersuchung der elektrischen Leitfähigkeit sind Experimente bei hohen Drücken und hohen Temperaturen an Proben, die den Vorstellungen über die Zusammensetzung des Erdmantels entsprechen. Die Messung der elektrischen Leitfähigkeit bei hohen Drücken und Temperaturen erfolgt meist in Diamantstempel-Hochdruckzellen (Miletich, 1998), in denen der hohe Druck beliebig lange aufrecht erhal-

ten werden kann. Shankland et al. (1993) messen die elektrische Leitfähigkeit an Proben aus Pyroxen (Mg, Fe)SiO₃ und Magnesiowüstite (Mg, Fe)O. Dazu variieren sie die Temperatur zwischen 20 °C und 400 °C bei jeweils konstantem Druck zwischen 1.2 GPa und 40 GPa. Ihre Ergebnisse extrapolieren sie auf die Drücke und Temperaturen im unteren Mantel. An der Kern-Mantel-Grenze steigt der Druck auf 135 GPa (vgl. Abbildung 1.4) und die Temperatur auf 3500 K bis 4000 K (vgl. Abbildung 1.5). Shankland et al. (1993) gehen von der Arrhenius-Gleichung für Halbleiter in der Form

$$\sigma(p, T) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta U + p \Delta V}{k_B T}\right) \quad (1.4)$$

aus, mit der Boltzmann-Konstanten k_B . Die Aktivierungsenergie ΔU , das Aktivierungsvolumen ΔV und die Leitfähigkeit σ_0 für den Grenzfall $T \rightarrow \infty$ bestimmen sie experimentell für verschiedene Probenzusammensetzungen. Mit Hilfe von Gleichung (1.4) kann die elektrische Leitfähigkeit unter den Bedingungen des unteren Mantels berechnet werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß sich die Zusammensetzung im unteren Mantel nicht ändert und keine Phasenübergänge auftreten.

1.3 Verlauf der elektrischen Leitfähigkeit

Die oben beschriebenen Verfahren sind in unterschiedlichem Maße auf die Kruste und den Mantel anwendbar. Über die Ergebnisse für die verschiedenen Tiefenbereiche geben die folgenden Abschnitte einen Überblick, wobei ihre Bedeutung für die Diffusion der Säkularvariation von der Kern-Mantel-Grenze an die Erdoberfläche im Vordergrund steht. Besonders wichtig ist der untere Mantel, der eine höhere elektrische Leitfähigkeit besitzt als der obere Mantel und in dessen D''-Schicht die elektrische Leitfähigkeit möglicherweise relativ hoch und zudem lateral inhomogen ist. Die elektrische Leitfähigkeit des äußeren Kerns an der Kern-Mantel-Grenze ist für die Einschätzung relevant, ob der Kern im Vergleich zum Mantel als ideal leitend behandelt werden kann, wie bei der Berechnung des Diffusionsprozesses in Kapitel 2 angenommen wird.

1.3.1 Erdkruste und oberer Mantel

Die Leitfähigkeit im oberen Mantel liegt größtenteils unterhalb von 0.1 S/m und fällt in Teilen der Kruste auf nur 10^{-5} S/m. Kruste und oberer Mantel sind daher für die Ausbreitung interner Magnetfeldänderungen unbedeutend. Allerdings weicht die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit hier erheblich von der Radialsymmetrie ab. Diese Abweichungen müssen bei der Erkundung der elektrischen Leitfähigkeit mit äußeren Quellen berücksichtigt werden. Die elektrische Leitfähigkeit der Ozeane liegt mit ca. 4 S/m um bis zu fünf Größenordnungen über der des umgebenden Gesteins. Der Einfluß der Ozeane macht sich bei Perioden zwischen 2 d und 200 d bemerkbar (Parkinson und Hutton, 1989). Sie wurden in Modellen zunächst als dünne Bereiche berücksichtigt, die keinen galvanischen Kontakt zur Umgebung hatten. Es konnten also keine Ströme aus diesen Bereichen in die Umgebung fließen, was zu deutlichen Differenzen zwischen den Daten und den berechneten Werten führte. Diese Leckströme, die aus der elektrisch gut leitenden Schicht

in die darunter liegenden, schlechter leitenden Schichten fließen, müssen berücksichtigt werden (z. B. Fainberg et al., 1990a). Vasseur und Weidelt (1977) behandeln die Theorie der elektromagnetischen Induktion mit einer lateral inhomogenen Oberflächenschicht in galvanischem Kontakt mit einem geschichteten Medium darunter. Dies Prinzip wird in dieser Arbeit aufgegriffen, um den Einfluß einer dünnen, lateral inhomogenen Schicht in der Nähe der Kern-Mantel-Grenze zu untersuchen (siehe Kapitel 5).

Fainberg et al. (1990b) schließen, daß die elektrische Leitfähigkeit der obersten 20 km kleiner als 10^{-5} S/m ist. Die Ozeane berücksichtigen sie als dünne Schicht mit einem Leitwert von 10^4 S. Vereinfacht dargestellt, sind Stromsysteme nicht an der Erdoberfläche geschlossen, sondern vielmehr fließen Ströme aus den gut leitenden Ozeanen an den Rändern vertikal nach unten, wo sie dann durch besser leitende Bereiche des Mantels fließen können und so die schlechter leitenden Bereiche der Kontinente darüber gewissermaßen umgehen. Diese Leckströme beeinflussen ihrerseits indirekt das Magnetfeld und erlauben so Rückschlüsse auf die hochohmigen Bereiche. Auch Kuvshinov et al. (1999) berücksichtigen die Ozeane und geben für die Lithosphäre eine Leitfähigkeit von 10^{-4} S/m an.

Im oberen Mantel ist die elektrische Leitfähigkeit ebenfalls verhältnismäßig klein. In diesem Bereich kommen festkörperphysikalische und geophysikalische Untersuchungen zu übereinstimmenden Ergebnissen. Xu et al. (2000) bestimmen die elektrische Leitfähigkeit mit Hilfe von Diamantstempelzellen für die Bedingungen und Zusammensetzungen in 200 km bis 400 km Tiefe. Ihr Ergebnis liegt in der Größenordnung von 10^{-2} S/m. In der gleichen Größenordnung liegen die Inversionsergebnisse von Constable (1993) für denselben Tiefenbereich. Parkinson und Hutton (1989) führen mehrere Arbeiten an, deren Werte ebenfalls in dieser Größenordnung liegen. In 660 km Tiefe, der Untergrenze der Übergangszone, tritt ein Phasenübergang auf, der möglicherweise mit einem Sprung in der elektrischen Leitfähigkeit von etwa 10^{-2} S/m auf 1 S/m einhergeht. Constable (1993) zeigt, daß ein solches Modell mit den Daten verträglich ist. Die meisten Modelle besitzen keinen derartigen Sprung, weil ohne zusätzliche Informationen glatten Modellen der Vorzug gegeben wird und die Tiefenauflösung der elektromagnetischen Tiefensondierung ohnehin niedrig ist.

Laterale Variationen der elektrischen Leitfähigkeit werden auch im oberen und mittleren Mantel vermutet. Weiss und Everett (1998) kommen zum Schluß, daß der Leitfähigkeitskontrast zwischen Ozeanen und Kontinenten nicht primär für die räumliche Variabilität langperiodischer geomagnetischer Daten verantwortlich ist. Sie benutzen eine Finite-Elemente-Methode und betrachten die Induktion durch externe Quellen. Nach ihrer Abschätzung variiert die elektrische Leitfähigkeit lateral im oberen Mantel um mehr als zwei Größenordnungen und auch im mittleren Mantel noch um mindestens eine Größenordnung. Das von ihnen betrachtete Modell besteht aus einem Mantel mit $\sigma_m = 0.1$ S/m, in den eine Kugel vom Radius 1000 km mit einer 10- bis 100-fach größeren elektrischen Leitfähigkeit eingebettet ist. Die Antwortfunktion dieses Modells läßt sich analytisch berechnen und kann zum Testen numerischer Verfahren benutzt werden, z. B. Martinec (1997, 1999) und Martinec et al. (2003), die ihre zwei- und dreidimensionalen spektralen Finite-Elemente-Methoden auf diese Weise verifizieren. Everett und Schultz (1996) verwenden ebenfalls eine Finite-Elemente-Methode, um den Einfluß unterschiedlicher Tiefen des Phasenüberganges zwischen oberem und unterem Mantel auf die Antwortfunktion zu berechnen. Neben den Finite-Elemente-Methoden werden auch Finite-Differenzen-Me-

thoden verwendet (z. B. Uyeshima und Schultz, 2000). Die Berechnungen von lateralen Inhomogenitäten reichen bereits vom oberen Mantel bis in den unteren Mantel hinab.

1.3.2 Unterer Mantel

Der untere Mantel ohne die D''-Schicht (diese wird im nächsten Abschnitt betrachtet) beeinflußt aufgrund seiner größeren Dicke von ca. 2000 km und seiner höheren elektrischen Leitfähigkeit von über 1 S/m die Diffusion der Magnetfeldänderungen sehr viel stärker als der obere Mantel und die Kruste. Dieser große Bereich scheint nur geringe laterale Variationen aufzuweisen, so ändern sich beispielsweise die seismischen Geschwindigkeiten lateral um weniger als 1 % (Wyssession, 1995). In ihm ist nicht mit einem dramatischen Anstieg der elektrischen Leitfähigkeit zu rechnen (Stacey und Davis, 2008). Die elektrische Leitfähigkeit im unteren Mantel ist weit weniger gut bekannt als im oberen Mantel, aber es ist zu vermuten, daß die elektrische Leitfähigkeit langsam weiter ansteigt. Bei zahlreichen Arbeiten über die elektrische Leitfähigkeit des unteren Mantels handelt es sich allerdings nur um Abschätzungen eines oberen Grenzwerts.

McDonald (1957) schätzt die Zeit, die ein Impuls in der Säkularvariation für die Durchquerung des Mantels benötigt, aus der in einigen Observatorien aufgetretenen Steigung der Säkularvariation mit $0.8 \text{ a} \pm 0.4 \text{ a}$ ab. Daraus leitet er das Leitfähigkeitsmodell

$$\sigma(r) = 223 \text{ S/m} \left(\frac{r}{c} \right)^{-5.1}, \quad c \leq r \leq 1.6 c, \quad (1.5)$$

ab. Alldredge (1977) vertritt hingegen die Ansicht, daß die Säkularvariationen bei Perioden um 15 a durch den Mantel um eine Größenordnung stärker gedämpft werden als bei Perioden um 25 a. Magnetfeldänderungen mit Perioden von 4 a bis 13 a schreibt er äußeren Quellen zu. Sein Leitfähigkeitsmodell,

$$\sigma(r) = 1.1 \cdot 10^5 \text{ S/m} \left(\frac{r}{c} \right)^{-25}, \quad c \leq r \leq a - 900 \text{ km}, \quad (1.6)$$

erreicht an der Kern-Mantel-Grenze fast die elektrische Leitfähigkeit des metallischen Kerns, fällt mit wachsendem Abstand von der Kern-Mantel-Grenze allerdings auch sehr viel schneller ab als das Modell von McDonald. Im allgemeinen wird davon ausgegangen, daß Magnetfeldänderungen im Periodenbereich oberhalb von 4 a im wesentlichen internen Ursprungs sind (z. B. Kertiz, 1969). Stacey und Davis (2008) ziehen die Grenze bei nur 1 a.

Achache et al. (1981) verwenden ein Inversionsverfahren, mit dem sie eine Lösung erhalten, bei der die elektrische Leitfähigkeit von 1 S/m in 600 km Tiefe auf 50 S/m in 2000 km Tiefe ansteigt. Für die obersten 600 km von Kruste und Mantel liefert die Inversion Werte unter 0.1 S/m.

Backus (1983) betrachtet die Diffusions- und die Glättungszeit von Jerks. Die Diffusionszeit ist ein Maß für die Zeitspanne, die ein Signal braucht, um von der Kern-Mantel-Grenze an die Erdoberfläche zu gelangen, und die Glättungszeit gibt an, wie stark ein Impuls auf diesem Weg auseinanderläuft. Beide Zeitkonstanten werden in Kapitel 3 definiert und diskutiert. Er geht davon aus, daß der Jerk von 1969 mit einem Ereignis in der

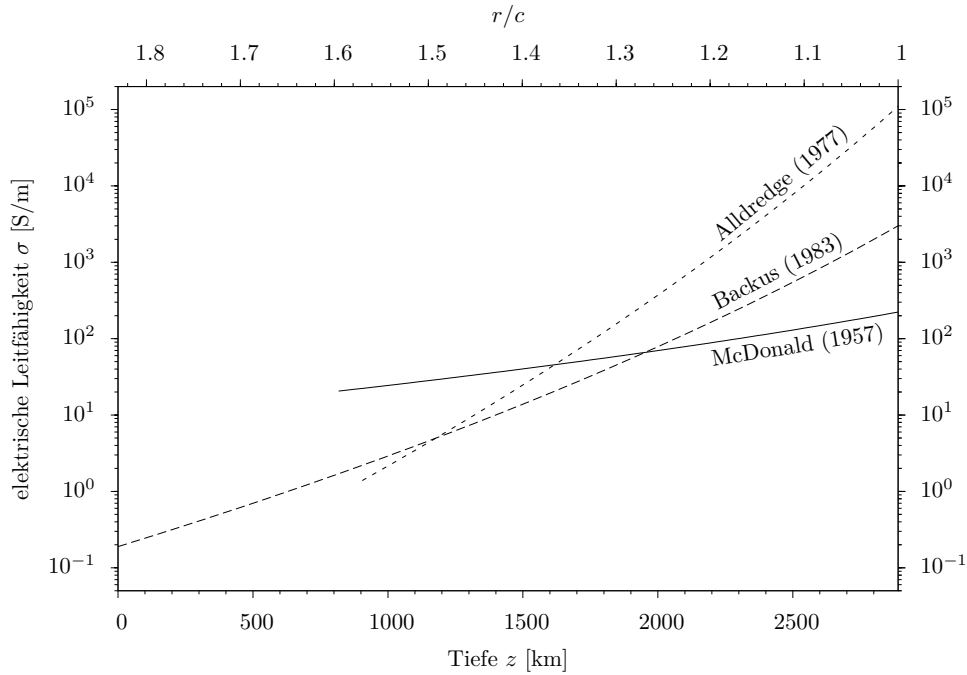


Abbildung 1.7: Die Modelle von McDonald (1957), Alldredge (1977) sowie Backus (1983) folgen dem Potenzansätzen von Gleichung 1.3. Sie gelten im wesentlichen für den unteren Mantel. In den zitierten Arbeiten werden die Leitfähigkeitsmodelle teils durch Modelle für den oberen Mantel ergänzt.

Tageslängenänderungen im Jahr 1956 zusammenhängt, und geht von einer Diffusionszeit von 13 a aus. Er hält ein Modell, für das

$$\sigma(r) = 3000 \text{ S/m} \left(\frac{r}{c} \right)^{-16}, \quad c \leq r \leq a, \quad (1.7)$$

gilt, für möglich. Dabei ist der Exponent so gewählt, daß die elektrische Leitfähigkeit bei 0.9 Erdradien (also in einer Tiefe von 637.1 km) 1 S/m beträgt.

Abbildung 1.7 zeigt die Potenzmodelle von McDonald (1957), Alldredge (1977) sowie Backus (1983). Die elektrischen Leitfähigkeiten an der Kern-Mantel-Grenze unterscheiden sich um fast drei Größenordnungen. Je größer die elektrische Leitfähigkeit an der Kern-Mantel-Grenze gewählt ist, desto stärker nimmt sie mit wachsendem Abstand vom Kern ab.

Stewart et al. (1995) schätzen aus der Zeitspanne zwischen geomagnetischen Schwankungen und Tageslängenänderungen, daß die Diffusionszeit 6.1 a beträgt, und damit nur etwa halb so lang ist, wie von Backus (1983) angenommen wird. Der Leitwert kann nach ihrer Ansicht durch eine 300 km dicke Schicht mit einer elektrischen Leitfähigkeit zwischen 330 S/m und 3300 S/m realisiert sein und erklärt sowohl die Diffusionszeit als auch die elektromagnetische Kern-Mantel-Kopplung. Der angegebene Leitwert von $6.7 \cdot 10^8 \text{ S}$ ist in der typischen Größenordnung des Leitwertes, der für die elektromagnetische Kern-Mantel-Kopplung benötigt wird. Holme (1998) gibt den erforderlichen Leitwert mit $3 \cdot 10^8 \text{ S}$ an.

Die räumlichen und zeitlichen Eigenschaften einiger Jerks deuten möglicherweise auf laterale Inhomogenitäten im Mantel hin (Nagao et al., 2003). Die Jerks von 1969, 1978

und 1991 treten um Südafrika und im Südpazifik ungefähr 3 a später auf und dauern dort länger als in anderen Regionen der Erde. In Fürstentfeldbruck (FUR) dauern die Jerks etwa 3 Monate, in Hermanus (HER), Südafrika, dagegen 13 Monate. Nagao et al. (2003) benutzen eine Finite-Differenzen-Methode und betrachten eine 800 km dicke elektrisch leitende Schicht über dem Kern. Aus dem Unterschied in der Diffusionszeit schließen sie auf eine elektrische Leitfähigkeit von mindestens 200 S/m in den Bereichen unter Südafrika und dem Südpazifik, und aus der Jerk-Dauer von weniger als sechs Monaten leiten sie für die anderen Bereiche eine elektrische Leitfähigkeit von weniger als 15 S/m ab.

Sowohl Backus (1983) als auch Nagao et al. (2003) stoßen auf Widersprüche zwischen den langen Diffusionszeiten bzw. großen regionalen Unterschieden in der Diffusionszeit und der relativ kurzen Dauer der Jerks. Die kurze Jerkdauer folgt aus den Observatoriumsdaten. Backus (1983) schließt aus der Annahme, daß die auffällige Tageslängenänderung 1956 mit dem Jerk von 1969 zusammenhängt, auf eine Diffusionszeit von 13 a. Dieser Zusammenhang ist aber keineswegs so klar, und andere Autoren kommen zu anderen Ergebnissen. Nagao et al. (2003) nehmen an, daß das spätere Auftreten einiger Jerks um Südafrika und im Südpazifik durch den Mantel verursacht wird. Es wäre auch denkbar, daß der Jerk an der Kern-Mantel-Grenze an verschiedenen Stellen zu unterschiedlichen Zeiten auftritt.

Wavelet-Analysen werden inzwischen häufig zur Untersuchung der Jerks eingesetzt. Die Ergebnisse fallen allerdings sehr unterschiedlich aus. Rotanova et al. (2002) schätzen die Dauer eines Jerks auf 10 a und die charakteristische Zeit für die Abschirmung durch den Mantel auf ca. 17 a, woraus sie die elektrische Leitfähigkeit im unteren Mantel mit 10^3 S/m abschätzen. Manda Alexandrescu et al. (1999) geben in ihrer Arbeit eine 2000 km dicke Schicht mit einer elektrischen Leitfähigkeit unter 10 S/m an.

Festkörperphysikalische Untersuchungen deuten auf niedrige elektrische Leitfähigkeiten zwischen 1 S/m und 10 S/m im unteren Mantel hin. Die Hochdruck-Hochtemperatur-Experimente von Shankland et al. (1993) bei Drücken zwischen 1.2 und 40 GPa im Temperaturbereich von 20 °C bis 400 °C liefern je nach Zusammensetzung der Probe Werte für die elektrische Leitfähigkeit zwischen 3 S/m und 10 S/m unmittelbar oberhalb der D''-Schicht, vgl. Abbildung 1.8. Constable (1993) stellt fest, daß diese geringe elektrische Leitfähigkeit mit den Beobachtungen der Induktion durch äußere Quellen im Periodenbereich zwischen 3.25 d und 103 d vereinbar sind. Er gibt Modelle an, in denen die elektrische Leitfähigkeit von 0.01 S/m in 200 km auf 2 S/m in 2000 km ansteigt.

McLeod (1994) untersucht die Antwort des Mantels auf äußere Anregungen mit Perioden zwischen zwei Monaten und zwei Jahren und bestimmt daraus die mittlere radiale elektrische Leitfähigkeit des unteren Mantels bis hinab zur Kern-Mantel-Grenze. Die Größenordnung der elektrischen Leitfähigkeit im untersten Bereich des Mantels gibt er mit etwa 10 S/m an, in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Shankland et al. (1993), siehe Abbildung 1.8. Er räumt aber auch ein, daß eine dünne gut leitende Schicht an der Kern-Mantel-Grenze mit seinen Ergebnissen vereinbar sei, weil sie nur einen kleinen Einfluß auf die globale Antwort habe.

Auch Honkura und Matsushima (1998) nutzen externe Anregungen mit Perioden zwischen 26 d und 1333 d für die Untersuchung des unteren Mantels. Für Tiefen zwischen 1571 km und 2371 km liegt die elektrische Leitfähigkeit zwischen 1 S/m und 3 S/m. Dieses Ergebnis ist ebenfalls konsistent mit den Ergebnissen von Shankland et al. (1993).

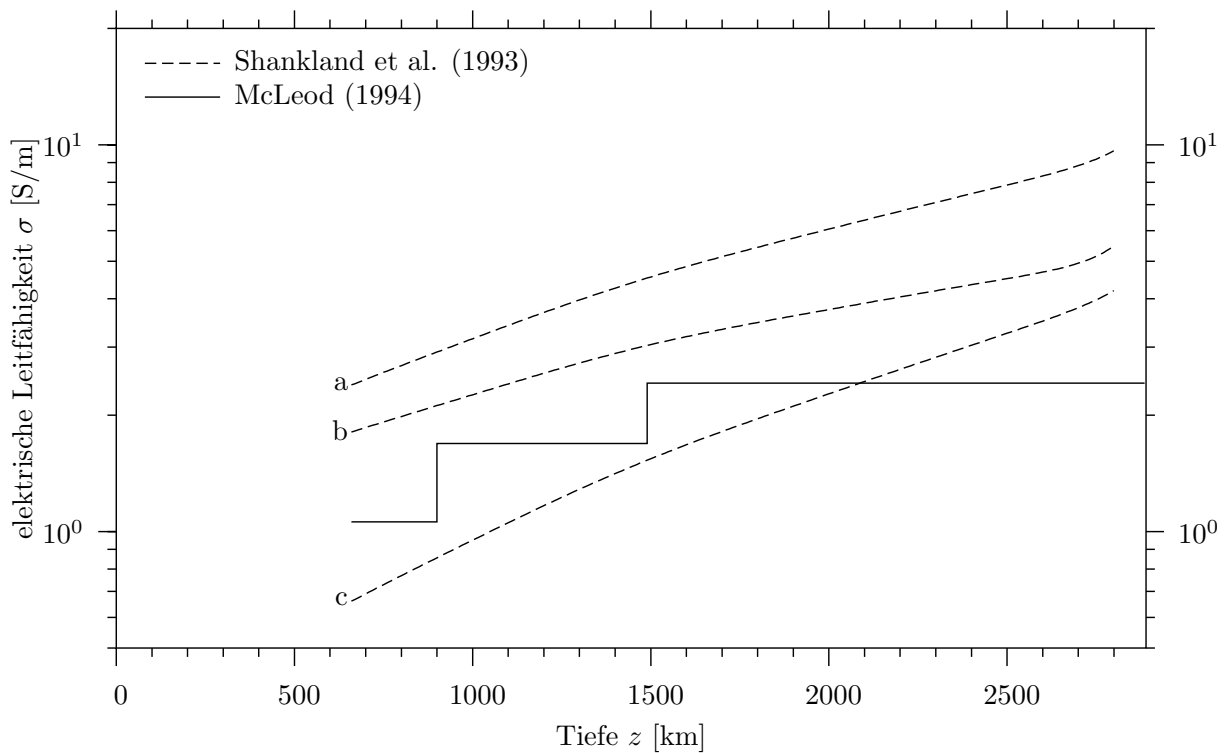


Abbildung 1.8: McLeod (1994) vernachlässigt in seinem Schichtmodell die elektrische Leitfähigkeit oberhalb einer Tiefe von 660 km. Die drei Leitfähigkeitskurven nach Shankland et al. (1993) sind mit Gleichung (1.4) berechnet und ergeben sich aus unterschiedlichen Probenzusammensetzungen, bei denen es sich um $(\text{Mg}_{0.84}, \text{Fe}_{0.16})\text{SiO}_4$ (Kurve a), $(\text{Mg}_{0.89}, \text{Fe}_{0.11})\text{SiO}_4$ (Kurve b) und $(\text{Mg}_{0.89}, \text{Fe}_{0.11})\text{SiO}_3$ (Kurve c) handelt.

Trotzdem ist nicht klar, bis in welche Bereiche des untersten Mantels die festkörperphysikalischen Messungen extrapoliert werden dürfen. Shankland et al. (1993) extrapolieren ihre Ergebnisse nur bis ungefähr 200 km oberhalb der Kern-Mantel-Grenze. Über die tatsächlichen Verhältnisse nahe der Kern-Mantel-Grenze gibt es sehr unterschiedliche Ansichten, über die im folgenden Abschnitt ein Überblick gegeben werden soll.

1.3.3 D''-Schicht und Kern-Mantel-Grenze

Die 40 km bis 250 km dicke D''-Schicht im untersten Mantel an der Grenze zum Kern ist in ihrer lateralen Inhomogenität wohl nur vergleichbar mit der Oberfläche. Sie ist eine thermische Grenzschicht (siehe Abbildung 1.5) und weist starke laterale Variationen in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit seismischer Wellen auf. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ändert sich lateral um mehr als 4% (Wyssession, 1995). Für die Struktur nennen Tromp und Dziewonski (1998) zwei Modelle. Im einen Modell liegt eine scharfe Diskontinuität mit einer sehr ausgeprägten Topographie vor, im anderen Modell gibt es einen radialen Gradienten in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und großskalige Inhomogenitäten durch starke Variationen in der Temperatur und der Zusammensetzung. Aus der seismischen

Tomographie kennt man Bereiche, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit um 10 % herabgesetzt ist und die weniger als 40 km dick sind.

Eine ausgeprägte Topographie von einigen Kilometern spielt für die Kern-Mantel-Kopplung eine Rolle. Sie könnte sogar die Strömungen im Kern an der Grenze zum Mantel und damit auch das Magnetfeld beeinflussen (Wyssession, 1995). Die Ursache für diese Struktur könnte sein, daß sich kaltes absinkendes Material in einigen Bereichen ansammelt, während in anderen Regionen heißes Material nach oben steigt. Stacey (1992) spricht in diesem Zusammenhang von *crypto-continents*, die bis zu 250 km mächtig sind, und *crypto-oceans*. Die *crypto-oceans* könnten Bereiche sein, in denen es zum teilweisen Schmelzen des Mantelmaterials kommt, was die außerordentlich niedrige Fortpflanzungsgeschwindigkeit erklären könnte. Die *Plumes* im Mantel werden durch die Struktur und das Verhalten der D''-Schicht kontrolliert (Stacey und Davis, 2008).

Für die elektrische Leitfähigkeit spielen laterale Variationen in der Temperatur eine geringere Rolle als mögliche Änderungen in der Zusammensetzung oder der Mineralogie. Extrapoliert man die Modelle von Shankland bis an die Kern-Mantel-Grenze, so führt eine Erhöhung der Temperatur von 2000 K auf 4500 K an der Kern-Mantel-Grenze nur zu einer dreimal höheren elektrischen Leitfähigkeit.

Es gibt mehrere Hypothesen über die chemischen Vorgänge an der Kern-Mantel-Grenze. Jeanloz und Romanowicz (1997) nehmen an, daß Oxide im Mantel mit der Eisenlegierung des äußeren Kerns stark reagieren und daß auf diese Weise über geologische Zeitskalen der Mantel im Kern gelöst wird. Dubrovinsky et al. (2003) dagegen vermuten eine Reaktion zwischen Eisen und Silizium, die zu einer metallisch leitenden Eisen-Silizium-Legierung führt. Die Dichte dieser Legierung liegt mit etwa $9.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ deutlich über der Dichte des Mantels und knapp unter der Dichte des Kerns. Kerr (2000) beschreibt den obersten Bereich des Kerns als umgekehrten Meeresboden, weil sich am Mantel Sedimentschichten aus Silikaten bilden. Nach Buffett et al. (2000) stören die Abkühlung und die Erstarrung des flüssigen Kerns das chemische Gleichgewicht, und es werden leichtere Elemente abgeschieden, die sich an der Kern-Mantel-Grenze ablagern. Der frisch sedimentierte Bereich ist verhältnismäßig starr mit dem Mantel verbunden und enthält noch größere Mengen an Eisen, so daß die elektrische Leitfähigkeit dort durchaus 10^5 S/m betragen kann. Die gesamte Sedimentschicht besitzt einen Leitwert von $1.7 \cdot 10^8 \text{ S}$. In diesen Modellen verursacht Eisen die Erhöhung der elektrischen Leitfähigkeit in einem vergleichsweise schmalen Bereich an der Kern-Mantel-Grenze.

Hochdruck-Experimente lassen vermuten, daß die obere Grenze der D''-Schicht zusammenfällt mit einem Phasenübergang des Pyroxen, $(\text{Mg, Fe})\text{SiO}_3$, aus der Perowskit-Struktur in eine Post-Perowskit-Struktur (Murakami et al., 2004; Oganov und Ono, 2004). Einige der seismischen Eigenschaften der D''-Schicht lassen sich gut durch diesen Wechsel der Kristallstruktur erklären. Ono et al. (2006) schließen aus der Analogie zwischen Al_2O_3 und MgSiO_3 , die beide bei hohen Drücken in der CaIrO_3 -Struktur (der sogenannten Post-Perowskit-Struktur) vorliegen, daß MgSiO_3 in der Post-Perowskit-Struktur eine erheblich höhere elektrische Leitfähigkeit besitzt als in der Perowskit-Struktur. Sie vermuten, daß die elektrische Leitfähigkeit in der D''-Schicht bis zu 2000 S/m betragen kann. Sie beschreiben abhängig von der tatsächlichen Temperatur an der Kern-Mantel-Grenze zwei mögliche Strukturen der D''-Schicht: Ist die Temperatur an der Kern-Mantel-Grenze kleiner als 4000 K, dann besteht die D''-Schicht vollständig aus MgSiO_3 in der Post-Perowskit-

Struktur. Liegt die Temperatur jedoch über 4000 K, dann liegt MgSiO_3 im oberen Bereich der D''-Schicht in der Post-Perowskit-Struktur und im unteren in der Perowskit-Struktur vor. In beiden Fällen hat man eine ausgeprägte Schicht erhöhter elektrischer Leitfähigkeit.

1.3.4 Äußerer Kern

Die metallische elektrische Leitfähigkeit des Kerns beträgt $2.76 \cdot 10^5 \text{ S/m}$ an der Kern-Mantel-Grenze (Stacey und Davis, 2008) und liegt mindestens zwei Größenordnungen über der Leitfähigkeit in der D''-Schicht. Diese hohe elektrische Leitfähigkeit ermöglicht erst die Erzeugung des Erdmagnetfeldes durch einen Dynamoprozeß. Auf Zeitskalen unter 100 a kann der Kern sogar als perfekter Leiter angesehen und das Theorem des eingefrorenen Flusses auf ihn angewendet werden. Vereinfacht bedeutet das, daß die Magnetfeldlinien fest mit dem Material verbunden sind und sich mit ihm mitbewegen, z. B. Backus et al. (1996). Aus den Magnetfeldänderungen lassen sich somit auch Rückschlüsse auf die Strömung an der Kern-Mantel-Grenze ziehen.

Die elektrische Leitfähigkeit schätzen Stacey und Anderson (2001) unter der Annahme ab, daß der spezifische elektrische Widerstand entlang der Schmelzkurve von Eisen konstant ist. Anschaulich begründet Stacey (1992) das damit, daß der spezifische elektrische Widerstand von der Streuung von Elektronen an Phononen abhängt, durch die die Elektronen ihre Driftgeschwindigkeit verlieren. Auf diese Weise beeinflussen Gitterschwingungen den spezifischen elektrischen Widerstand. Die Gitterschwingungen wachsen mit steigender Temperatur an und werden durch ansteigenden Druck zunehmend behindert. Bei einer bestimmten Amplitude der Gitterschwingungen beginnt das Metall zu schmelzen. Auf der Schmelzkurve ist die Amplitude der Gitterschwingungen nahezu konstant und die Einflüsse von Druck und Temperatur auf den spezifischen elektrischen Widerstand heben sich gegenseitig auf. Stacey und Anderson (2001) zeigen dies theoretisch für ein ideales Metall und gehen dann vom spezifischen elektrischen Widerstand von Eisen bei Normaldruck aus. Sie erhalten eine elektrische Leitfähigkeit von $4.7 \cdot 10^5 \text{ S/m}$. Stacey und Davis (2008) erläutern inwiefern Eisen, ein relativ schlechter metallischer Leiter, vom idealen Metall abweicht und geben an, wie sich diese Abweichungen auf den spezifischen elektrischen Widerstand auswirken. Damit kommen sie auf den verbesserten Wert für die elektrische Leitfähigkeit von $2.76 \cdot 10^5 \text{ S/m}$. In diesen Werten haben Stacey und Anderson (2001) sowie Stacey und Davis (2008) bereits den Einfluß von Verunreinigungen durch Nickel, Schwefel und Sauerstoff berücksichtigt, durch die der spezifische elektrische Widerstand um etwa $0.9 \mu\Omega\text{m}$ ansteigt.

Die elektrische Leitfähigkeit des äußeren Erdkerns an der Kern-Mantel-Grenze geht nicht in die Leitfähigkeitsmodelle ein, die im nächsten Abschnitt vorgestellt werden, aber sie ist wichtig für die Theorie der Diffusion durch den Mantel, die in Kapitel 2 vorgestellt wird. Dort wird der Kern aufgrund seiner hohen Leitfähigkeit als idealer Leiter behandelt.

1.4 Modelle der elektrischen Leitfähigkeit des Mantels

In dieser Arbeit werden drei Modelle für den Verlauf der elektrischen Leitfähigkeit im Mantel verwendet, die sich nur im Bereich der D''-Schicht unterscheiden. Alle Leitfähig-

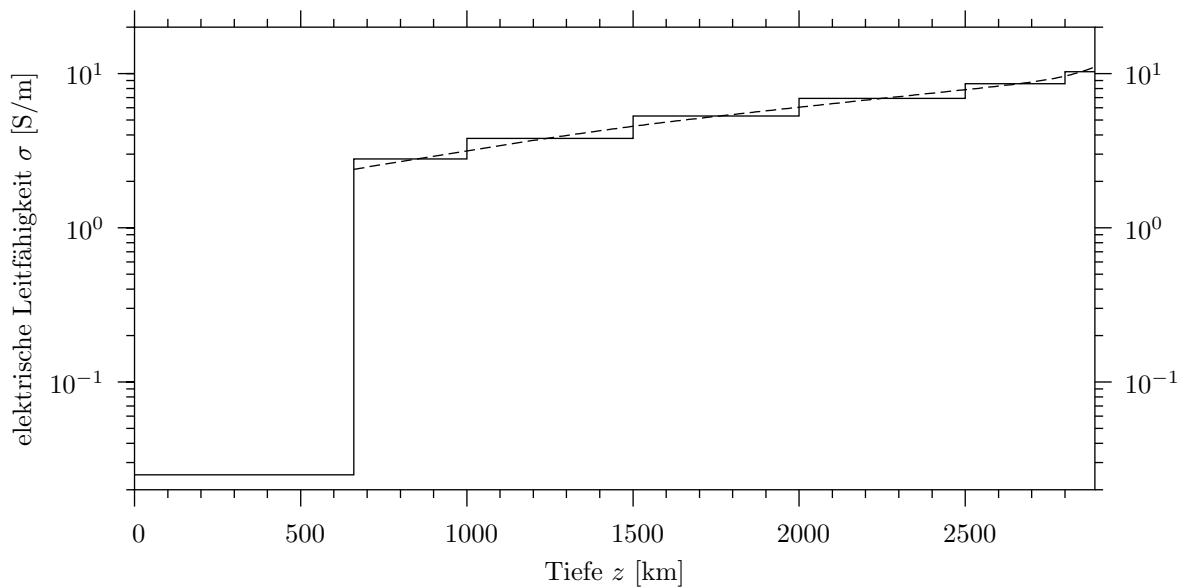


Abbildung 1.9: Das Modell S (durchgezogene Kurve) ist dem gestrichelten Leitfähigkeitsmodell von Shankland et al. (1993), Kurve a in Abbildung 1.8, angenähert.

keitsmodelle beruhen im Bereich des oberen Mantel hauptsächlich auf den Werten der elektromagnetischen Tiefensonddierung und für den unteren Mantel auf den Ergebnissen der Hochdruck-Experimente. Die Modelle bestehen aus Schichten mit jeweils konstanter elektrischer Leitfähigkeit. Zur Untersuchung des Einflusses lateraler Inhomogenitäten in Kapitel 5 enthält ein Modell zusätzlich eine infinitesimal dünne Schicht, die zwei Hemisphären mit unterschiedlichen Leitwerten besitzt. Schichtmodelle eignen sich sehr gut, weil ihnen Sprünge in der Leitfähigkeit, wie sie in 660 km Tiefe und möglicherweise auch in 2640 km Tiefe, an der Obergrenze der D''-Schicht auftreten, inhärent sind.

Die Kruste und der obere Mantel werden durch eine 660 km dicke Schicht mit 0.025 S/m berücksichtigt. Dieser Wert wird von Constable (1993) für den Tiefenbereich von 100 km bis 660 km angegeben. Eine detailliertere Modellierung ist wegen der geringen elektrischen Leitfähigkeit nicht notwendig. Selbst die gut leitenden Ozeane können aufgrund ihrer vergleichsweise winzigen vertikalen Ausdehnung vernachlässigt werden. Der moderate Anstieg der elektrischen Leitfähigkeit im unteren Mantel von 2.8 S/m auf bis zu 10.3 S/m wird durch kleine Stufen nachvollzogen. Die Werte orientieren sich an dem Modell von Shankland et al. (1993), das die höchste elektrische Leitfähigkeit besitzt, vgl. Abbildung 1.9. Für die D''-Schicht sind sehr verschiedene Verhältnisse denkbar. Mit drei Modellen lassen sich die wichtigsten Fälle erfassen:

Modell S ist das Standardmodell nach Shankland et al. (1993), siehe Abbildung 1.9. Es wird angenommen, daß sich die D''-Schicht weder in der chemischen Zusammensetzung noch in der Kristallstruktur vom Mantel darüber unterscheidet. Das Leitfähigkeitsmodell von Shankland et al. (1993) wird einfach bis an die Kern-Mantel-Grenze extrapoliert. Damit erhält man die Werte wie sie in Abbildung 1.10 angegeben sind.

Modell SD weicht vom Standardmodell durch eine D''-Schicht mit einer elektrischen Leitfähigkeit von 2000 S/m und einer Dicke von 250 km ab. Es wird angenommen, daß

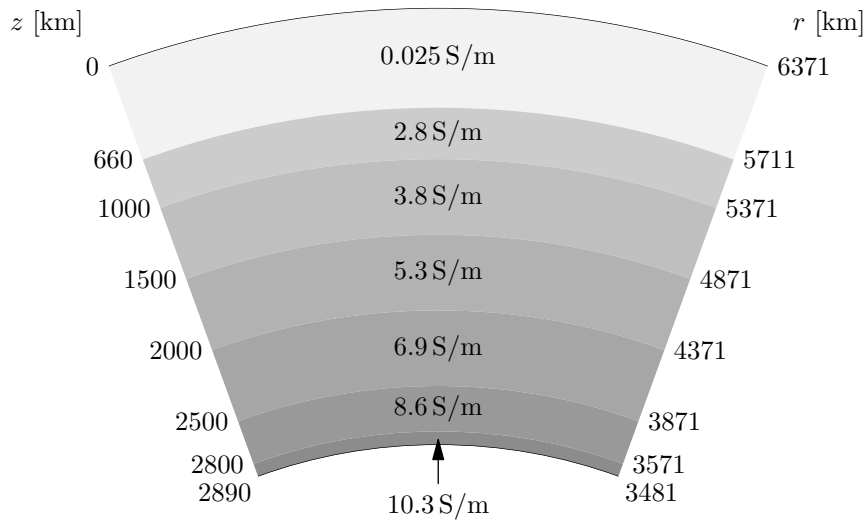


Abbildung 1.10: Modell S

Pyroxen an der Obergrenze der D'' -Schicht von der Perowskit- in die Post-Perowskit-Struktur mit höherer elektrischer Leitfähigkeit übergeht (Ono et al., 2006).

Modell $S\delta_2$ erhält man aus dem Standardmodell, indem man eine infinitesimal dünne δ -Schicht einfügt, die aus einer atlantischen und einer pazifischen Hemisphäre mit dem Leitwerten $\tau_A = 10^8$ S in der atlantischen bzw. $\tau_P = 5 \cdot 10^8$ S in der pazifischen Hemisphäre besteht.

Der Leitwert des gesamten Mantels beträgt im Modell S etwa $1.25 \cdot 10^7$ S, während allein die D'' -Schicht des Modells SD einen Leitwert von $5 \cdot 10^8$ S besitzt. Die Abbildung 1.11 stellt die elektrische Leitfähigkeit im untersten Mantel der Modelle S, SD und $S\delta_2$ einander gegenüber.

Abschnitt 1.3 hat gezeigt, daß die Unklarheit über den Verlaufs der elektrischen Leitfähigkeit insbesondere im untersten Bereich des Mantels noch groß ist. Die Modelle S, SD und $S\delta_2$ bilden die wichtigsten Fälle ab, nämlich einen Mantel ohne bzw. mit Anstieg der elektrischen Leitfähigkeit in der D'' -Schicht und eine gut leitende, lateral inhomogene Schicht. Die Höhe der gewählten elektrischen Leitfähigkeiten orientiert sich dabei eher am oberen Bereich der Modelle von Shankland et al. (1993) und Ono et al. (2006). Teilweise gehen in die Auswahl der Modelle auch Informationen ein, die erst in späteren Kapiteln erläutert werden. In Kapitel 3 zeigt sich, daß von zwei Schichten an der Kern-Mantel-Grenze, die den gleichen Leitwert besitzen, die dickere Schicht den stärkeren Einfluß ausübt. Daher wird für Modell SD nicht eine dünne Schicht mit extrem hoher Leitfähigkeit verwendet, sondern eine, die die gesamte D'' -Schicht ausfüllt und eine geringere Leitfähigkeit hat. Kapitel 5 zeigt, daß sich die lateral inhomogene Schicht des Modells $S\delta_2$ nur auf relativ kurzen Zeitskalen auswirkt. Aus diesem Grund wird auf ein Modell für einen lateral inhomogenen Mantel ohne gleichzeitigen Anstieg der elektrischen Leitfähigkeit in der D'' -Schicht verzichtet. Diese drei Modelle bilden die Referenz in der vorliegenden Arbeit. Sie werden an verschiedenen Stellen modifiziert, um den Einfluß einzelner Parameter wie der elektrischen Leitfähigkeit, der Dicke und der Lage der Schichten zu untersuchen.

Der nichtleitende Mantel wird nicht als gesondertes Modell betrachtet, obwohl er an

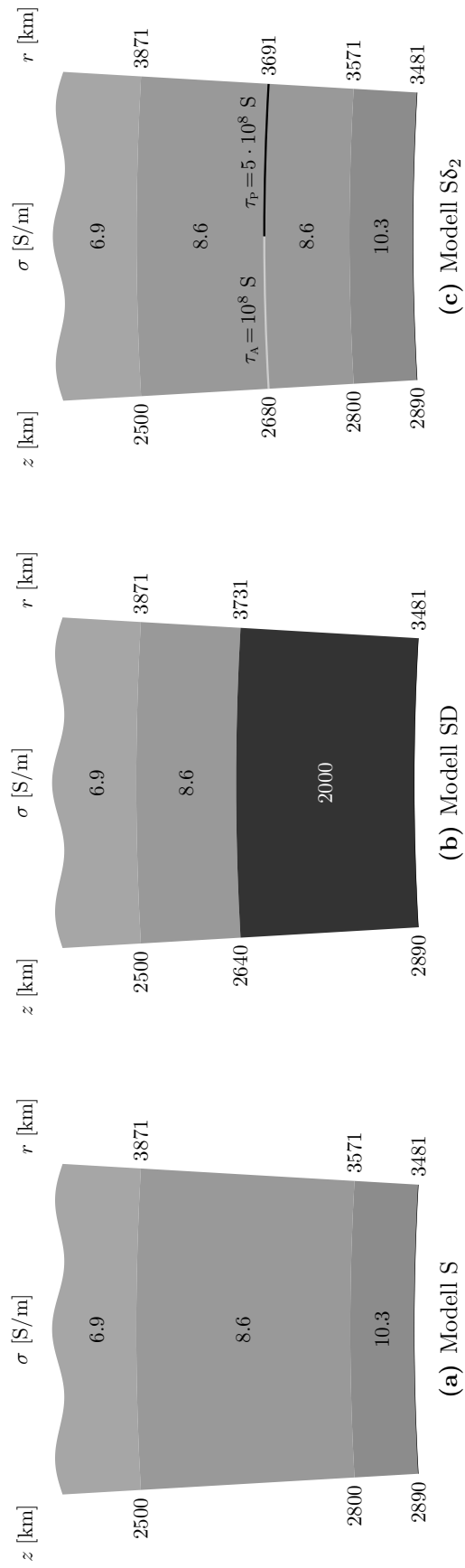


Abbildung 1.11: Vergleich der untersten 500 km der Modelle S, SD und $S\delta_2$

1 Elektrische Leitfähigkeit des Erdmantels

einigen Stellen für Vergleiche herangezogen wird, und in sehr vielen Fällen eine durchaus geeignete Näherung ist.

Kapitel 2

Diffusion durch den geschichteten Mantel

Es gibt Hinweise darauf, daß man aus der Diffusion der Säkularvariation eine obere Schranke für die elektrische Leitfähigkeit des unteren Mantels ableiten kann, siehe z. B. McDonald (1957), Smylie (1965), Backus (1983), Holme (1998). In diesem Kapitel wird die Diffusion von Magnetfeldänderungen, also der Säkularvariation, durch den Mantel beschrieben. Insbesondere soll der Einfluß des elektrisch leitenden Mantels auf die Ausbreitung der zeitlichen Änderungen des Magnetfeldes von der Kern-Mantel-Grenze an die Erdoberfläche untersucht werden. Dazu wird ein geschichteter Mantel behandelt, wie er durch die Modelle S und SD des letzten Kapitels beschrieben wird.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, für einen vorgegebenen zeitlichen Verlauf der magnetischen Flußdichte $\mathbf{B}(t)$ an der Kern-Mantel-Grenze ($r = c$) den zugehörigen zeitlichen Verlauf an der Erdoberfläche ($r = a$) zu bestimmen. Dazu wird zunächst zur harmonischen Zeitabhängigkeit $\sim \exp(i\omega t)$ übergegangen (Abschnitt 2.4), die dem Problem angemessen ist und keine Einschränkung darstellt. Wenn man den Verlauf für beliebige Frequenzen kennt, dann kann man mit Hilfe der Fourier-Transformation den Verlauf für nahezu beliebige Anregungsformen bestimmen. Eine wichtige Rolle spielt die Zerlegung der magnetischen Flußdichte in ihren poloidalen und toroidalen Anteil, die sogenannte Mie-Darstellung (Abschnitt 2.5), wobei im nichtleitenden Außenraum ($r > a$) nur der poloidale Anteil beobachtbar ist (siehe am Ende von Abschnitt 2.6). Abbildung 2.1 zeigt schematisch die Herangehensweise. Die toroidale Komponente besitzt keinen radialen Anteil, die radiale Komponente B_r der magnetischen Flußdichte gehört vollständig zum poloidalen Feldanteil. Desweiteren zeichnet die Komponente B_r aus, daß sie im Gegensatz zur tangentialen Komponente an der Kern-Mantel-Grenze stetig ist (Abschnitt 2.8.1). Die Mie-Darstellung hat für elektrisch leitende Medien die Bedeutung, die die Gaußsche Darstellung des Magnetfeldes im Außenraum mit $\sigma = 0$ hat, und schließt letztere als Spezialfall mit ein.

Bei der Behandlung werden einige Vereinfachungen vorgenommen. So wird der gesamte Außenraum ($r > a$) als nichtleitend angenommen. Dort fließen im Rahmen dieses Modells keine Ströme, und externe Quellen spielen keine Rolle für die Theorie der Diffusion von Magnetfeldänderungen vom Kern an die Erdoberfläche. Weitere Annahmen werden in Abschnitt 2.1 beschrieben. Eine weitere wesentliche Vereinfachung ist die Verwendung der quasi-stationären Maxwell-Gleichungen (Abschnitt 2.3).

In Abschnitt 2.9 wird die harmonische Anregung an den Modellen S und SD genauer untersucht. Anschließend wird skizziert, wie man mit Hilfe der Fourier-Transformation eine beliebige Anregung an der Kern-Mantel-Grenze untersuchen kann, wenn man das Verhalten des leitenden Mantels bei harmonischer Anregung kennt. Am Ende des Kapitels wird die Anregung mit einem δ -Impuls betrachtet.

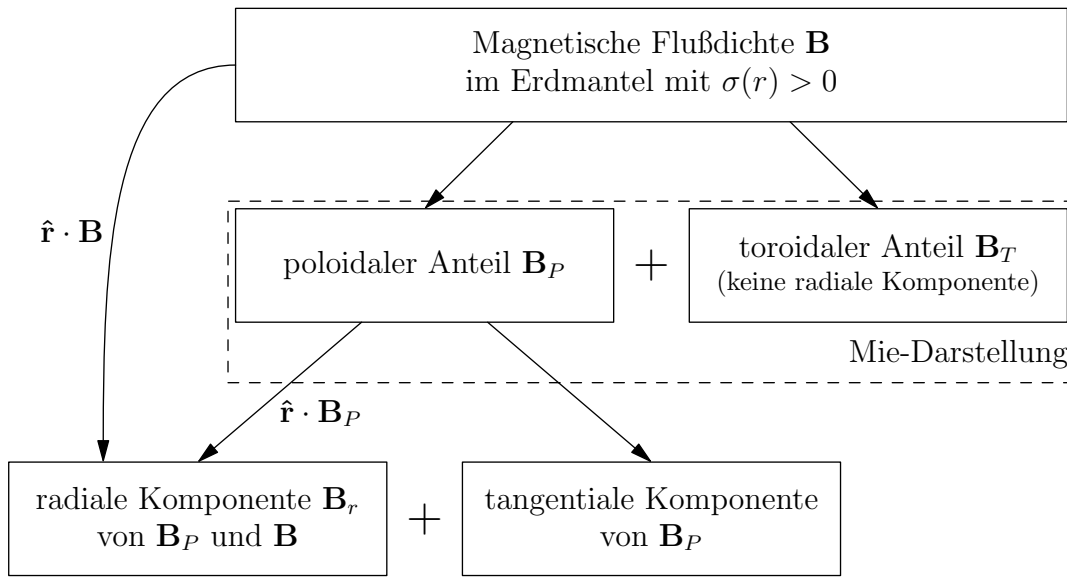


Abbildung 2.1: Darstellung der magnetischen Flußdichte \mathbf{B} im elektrisch leitenden, radialsymmetrischen Mantel

2.1 Annahmen und Voraussetzungen

Es werden im folgenden sphärische Koordinaten (r, ϑ, φ) verwendet (Abbildung 2.2) mit der Kern-Mantel-Grenze bei $r = c$ und der Erdoberfläche bei $r = a$. Die Koordinate ϑ ist die Kobreite mit Äquatorebene bei $\vartheta = \pi/2$, und φ ist die geographische Länge. Die Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit wird durch $\sigma = \sigma(r)$ beschrieben. Es gilt $\sigma(r) = \infty$ für $r < c$ und $\sigma(r) = 0$ für $r > a$.

Es wird ausgenutzt, daß sich im Mantel keine Stromquellen befinden, und somit $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ gilt.

Ferner wird der Einfluß magnetischer Minerale vernachlässigt, denn bereits in einer Tiefe von etwa 30 km werden die Curie-Temperaturen dieser Minerale überschritten (z. B. Strobach, 1991). Selbst in geringeren Tiefen spielen sie nur an wenigen Orten überhaupt eine Rolle. Aus diesem Grund wird im folgenden angenommen, daß für die Permeabilität

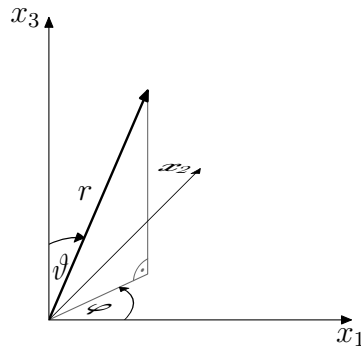


Abbildung 2.2: Die hier verwendeten sphärischen Koordinate r, ϑ, φ sind in einem kartesischen Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 veranschaulicht.

$\mu = \mu_0$ ist, mit der magnetischen Feldkonstanten μ_0 .

Analog wird für die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \varepsilon_0$ angenommen, wobei ε_0 die Influenzkonstante oder elektrische Feldkonstante ist, weil die Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ für die relevanten Frequenzen kaum von 1 abweicht (z. B. Kertz, 1969; Weaver, 1994). Tatsächlich gibt es Regionen, in denen ε_r von 1 abweichen kann, z. B. trockener Sand 3–5, Granit 6, Süßwasser 80. Aufgrund der – im Vergleich zum gesamten Mantel – geringen Ausdehnung spielen diese Bereiche keine Rolle. In Abschnitt 2.3 wird außerdem gezeigt, daß der Term, der die Dielektrizitätskonstante enthält, vernachlässigt werden kann, so daß Abweichungen von $\varepsilon_r = 1$ hier kein Problem darstellen.

2.2 Feldgleichungen

Ausgangspunkt für die Behandlung des Diffusionsprozesses sind die Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho. \quad (2.4)$$

Hinzu kommen das Ohmsche Gesetz

$$\mathbf{J} = \sigma(r) \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

das sowohl die hier als radialsymmetrisch vorausgesetzte Leitfähigkeitsverteilung $\sigma = \sigma(r)$ als auch die Quelfreiheit der Stromdichte im Mantel berücksichtigt, sowie die Materialgleichungen

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (2.6)$$

Setzt man die Materialgleichungen in die Gleichungen (2.1) und (2.4) ein, so erhält man

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varrho / \varepsilon_0. \quad (2.8)$$

2.3 Quasi-stationäre Näherung

Die Maxwellgleichung (2.7) läßt sich vereinfachen, weil die Verschiebungsstromdichte vernachlässigt werden kann, wie kurz gezeigt werden soll. Zum Zweck einer Abschätzung kann für den Mantel die konstante elektrische Leitfähigkeit $\sigma(r) = \sigma_M$ angenommen werden, und die Rotation angewandt auf Gleichung (2.7) läßt sich mit Gleichung (2.5) schreiben als

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \sigma_M \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \\ &= -\mu_0 \sigma_M \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Hier ist $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ die Lichtgeschwindigkeit. Für die Diffusion durch den Mantel können charakteristische Größen für die Länge L und die Zeit T eingeführt werden, allerdings werden ihre Werte erst später sinnvoll gewählt. Mit ihrer Hilfe lassen sich die dimensionslosen Variablen $t' := t/T$, $x'_i := x_i/L$ einführen (Weaver, 1994). Für den Wechsel der Koordinaten werden außerdem die entsprechenden Differentialoperatoren gebraucht. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t'} \quad \text{und} \quad \nabla = \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{x}_i \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{1}{L} \nabla'. \quad (2.10)$$

Die Vektoren \mathbf{x}_i sind die Einheitsvektoren, die das kartesische Koordinatensystem aufspannen. Damit folgt aus Gleichung (2.9)

$$\frac{1}{L^2} \nabla' \times \nabla' \times \mathbf{B} + \mu_0 \sigma_M \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{B} + \frac{1}{c^2 T^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \mathbf{B} = 0. \quad (2.11)$$

Mit den ebenfalls dimensionslosen Parametern

$$\eta_1 := \mu_0 \sigma_M \frac{L^2}{T} \quad \text{und} \quad \eta_2 := \frac{L^2}{c^2 T^2} \quad (2.12)$$

läßt sich Gleichung (2.9) schließlich in die Form

$$\nabla' \times \nabla' \times \mathbf{B} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{B} + \eta_2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \mathbf{B} = 0 \quad (2.13)$$

bringen.

Setzt man zur Abschätzung des Verhältnisses $\eta_2/\eta_1 = \varepsilon_0/(\sigma_M T)$ für die charakteristische Zeit $T = 0.1$ d und für die Mantelleitfähigkeit $\sigma_M = 0.01$ S/m ein, dann erhält man $\eta_2/\eta_1 \approx 10^{-13}$, somit ist $\eta_2 \ll \eta_1$. Dabei ist die charakteristische Zeit sehr kurz gewählt verglichen mit Zeiten, die für das innere Magnetfeld eine Rolle spielen, und die elektrische Leitfähigkeit des Mantels ist kleiner als die in den Leitfähigkeitsmodellen verwendete. Der Erdumfang liefert eine obere Grenze für die auftretenden Längen. Mit $L = 4 \cdot 10^7$ m erhält man die Abschätzung $\eta_2 \approx 2.4 \cdot 10^{-10}$, also ist $\eta_2 \ll 1$.

Diese Abschätzungen rechtfertigen die Vernachlässigung des letzten Terms in Gleichung (2.13), der die Verschiebungsstromdichte berücksichtigt. Gleichung (2.7) vereinfacht sich damit zu

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 \sigma(r) \mathbf{E}. \quad (2.14)$$

Diese Näherung gilt sogar noch, wenn man für die Dielektrizitätszahl, für die hier $\varepsilon_r = 1$ vorausgesetzt wurde, Werte in der Größenordnung 10^3 zuläßt. Bei den hier betrachteten Frequenzen erreichen nur Ferroelektrika derart hohe Werte.

2.4 Diffusionsgleichung für die magnetische Flußdichte

Setzt man $\sigma = \text{const.}$, dann kommt man schnell zu einer Diffusionsgleichung für \mathbf{B} . Dieser Spezialfall ist zum einen von Interesse, weil die Modelle aus Schichten mit jeweils konstanter elektrischer Leitfähigkeit bestehen, und zum anderen zeigt sich an ihm, daß die Wahl einer harmonischen Zeitabhängigkeit $\sim \exp(i\omega t)$ sinnvoll ist.

Wendet man die Rotation auf Gleichung (2.14) mit $\sigma = \text{const.}$ an, dann erhält man

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \nabla \times \mathbf{E}. \quad (2.15)$$

Setzt man $\nabla \times \mathbf{E}$ aus Gleichung (2.2) ein und berücksichtigt

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.16)$$

dann erhält man die Diffusionsgleichung

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (2.17)$$

z. B. Kertz (1969), Backus et al. (1996). Diese Differentialgleichung kann mit Hilfe des Separationsansatzes

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r})g(t) \quad (2.18)$$

gelöst werden. Setzt man diesen in Gleichung (2.17) ein, dann erhält man

$$g(t)\nabla^2 \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \mu_0 \sigma \mathbf{b}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial t} g(t), \quad (2.19)$$

bzw. nach Trennung der Variablen

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\mathbf{b}(\mathbf{r})}{|\mathbf{b}(\mathbf{r})|^2} \nabla^2 \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \frac{1}{g(t)} \frac{\partial}{\partial t} g(t), \quad (2.20)$$

wobei $g(t) \neq 0$ und $|\mathbf{b}(\mathbf{r})| \neq 0$ vorausgesetzt wird. Jetzt hängt die linke Seite nur von \mathbf{r} und die rechte nur von t ab. Gleichung (2.20) kann nur erfüllt werden, wenn beide Seiten konstant sind. Für die rechte Seite wird dies erfüllt, wenn man die harmonische Zeitabhängigkeit $g(t) = \exp(i\omega t)$ verwendet, denn dann ist

$$\frac{1}{g(t)} \frac{d}{dt} g(t) = i\omega \quad (2.21)$$

konstant. Die magnetische Flußdichte kann damit geschrieben werden als

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t). \quad (2.22)$$

und die zeitliche Ableitung liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (2.23)$$

Die Diffusionsgleichung (2.17) kann geschrieben werden als

$$\nabla^2 \mathbf{B} = i\omega \mu_0 \sigma \mathbf{B}. \quad (2.24)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung wird an dieser Stelle nicht behandelt, weil in den nächsten Abschnitten der allgemeinere Fall mit $\sigma = \sigma(r)$ betrachtet wird.

Die Einführung der harmonischen Zeitabhängigkeit $\sim \exp(i\omega t)$ in die Maxwellgleichung (2.2) führt auf

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}. \quad (2.25)$$

Diese Gleichung bildet zusammen mit den Gleichungen (2.14) und (2.5)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \mathbf{J} &= \sigma(r) \mathbf{E} \end{aligned}$$

den Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen.

2.5 Mie-Darstellung

Divergenzfreie Vektorfelder können eindeutig als Summe eines poloidalen und eines toroidalen Feldes dargestellt werden. Das poloidale und das toroidale Feld hängen jeweils nur von einer skalaren Funktion ab, aus der sie sich durch Anwendung der Rotation ableiten lassen, siehe z. B. Wolf-Gladrow (1987), Backus et al. (1996). Diese Aufteilung in poloidale und toroidale Anteile wird als Mie-Darstellung oder Mie-Zerlegung bezeichnet.

Da $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ (im Mantel) gilt, können sowohl die magnetische Flußdichte \mathbf{B} und als auch die Stromdichte \mathbf{J} entsprechend als Summe eines poloidalen und eines toroidalen Anteils ausgedrückt werden. Formal läßt sich dies durch

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_P + \mathbf{B}_T \quad \text{und} \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_P + \mathbf{J}_T \quad (2.26)$$

ausdrücken. Der poloidale und der toroidale Anteil der magnetischen Flußdichte lassen sich mit Hilfe des poloidalen Potentials P_B bzw. des toroidalen Potentials T_B schreiben als

$$\mathbf{B}_P = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} P_B) = -\nabla \times \mathbf{\Lambda} P_B \quad \text{und} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{B}_T = \nabla \times (\mathbf{r} T_B) = -\mathbf{\Lambda} T_B \quad (2.28)$$

mit dem linearen Differentialoperator

$$\mathbf{\Lambda} \psi := \mathbf{r} \times \nabla \psi, \quad (2.29)$$

wobei ψ eine beliebige Funktion, also etwa P_B oder T_B , sei. Der $\mathbf{\Lambda}$ -Operator besitzt keine r -Komponente und keine Ableitung nach r . Seine Darstellung in Kugelkoordinaten ist

$$\mathbf{\Lambda} = -\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad (2.30)$$

siehe Abschnitt A im Anhang. Der Operator $\mathbf{\Lambda}$ besitzt unter anderem folgende Eigenschaften:

$$\mathbf{\Lambda} \psi = -\nabla \times (\mathbf{r} \psi), \quad (2.31)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{\Lambda} \psi) = 0, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{\Lambda} \psi) = 0. \quad (2.33)$$

Die skalaren Potentiale P_B in Gleichung (2.27) und T_B in Gleichung (2.28) sind nicht eindeutig festgelegt. Man kann eine Funktion $g(r)$, die nur von r abhängt, addieren, ohne daß sich \mathbf{B}_P und \mathbf{B}_T ändern, weil $\mathbf{\Lambda} g(r) = 0$ gilt. Die Potentiale können eindeutig festgelegt werden, wenn man zusätzlich fordert, daß ihre Mittel über Kugelflächen verschwinden, d. h.

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \psi \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 0, \quad (2.34)$$

wobei $\psi = P_B$ oder $\psi = T_B$ ist, siehe Wolf-Gladrow (1987).

Beim Vergleich von Gleichung (2.27) und Gleichung (2.28) erkennt man, daß die Rotation eines toroidalen Feldes ein poloidales Feld liefert. Umgekehrt liefert die Rotation

eines poloidalen Feldes ein toroidales Feld, weil der $\mathbf{\Lambda}$ -Operator angewandt auf eine skalare Funktion ein toroidales Feld ergibt, vgl. Gleichung (2.28).

$$\nabla \times \mathbf{B}_P = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{\Lambda} P_B = \nabla^2 \mathbf{\Lambda} P_B = \mathbf{\Lambda} \nabla^2 P_B. \quad (2.35)$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, daß der Laplace- und der $\mathbf{\Lambda}$ -Operator vertauschbar sind, siehe Abschnitt A, Gleichung (A.29). Weiter folgt aus

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_T = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda} T_B = 0 \quad (2.36)$$

und

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{B}_P = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda} \nabla^2 P_B = 0, \quad (2.37)$$

daß sowohl der toroidale Anteil \mathbf{B}_T als auch die Rotation des poloidalen Anteils $\nabla \times \mathbf{B}_P$ senkrecht auf dem Ortsvektor \mathbf{r} stehen, also tangential an den Kugelflächen $r = \text{const.}$ liegen.

Mit Gleichung (2.27) und Gleichung (A.35) aus Abschnitt A läßt sich die poloidale magnetische Flußdichte in Kugelkoordinaten schreiben als

$$\mathbf{B}_P = -\hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r} \Lambda^2 P_B + \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} (r P_B) + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} (r P_B). \quad (2.38)$$

Die toroidale magnetische Flußdichte \mathbf{B}_T in Kugelkoordinaten folgt aus den Gleichungen (2.28) und (2.30):

$$\mathbf{B}_T = \frac{1}{\sin \vartheta} \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \frac{\partial}{\partial \varphi} T_B - \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} T_B. \quad (2.39)$$

Die Bestimmung der skalaren Potentiale P_B und T_B ist im Prinzip aus der Kenntnis der Radialkomponente von \mathbf{B} bzw. der Radialkomponente von $\nabla \times \mathbf{B}$ möglich, weil diese als Quellen der Potentiale aufgefaßt werden können, siehe Wolf-Gladrow (1987), Backus et al. (1996). Für P_B folgt aus den Gleichungen (2.36) und (2.38)

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_P = -\Lambda^2 P_B. \quad (2.40)$$

Für T_B erhält man die Beziehung

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{B}_T = -\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{\Lambda} T_B = -\Lambda^2 T_B, \quad (2.41)$$

wobei im letzten Schritt Gleichung (A.36) verwendet wird.

2.6 Poloidale und toroidale magnetische Mode

Im folgenden werden Diffusionsgleichungen für das poloidale und das toroidale Potential hergeleitet. Zuvor soll kurz die Zerlegung der Stromdichte \mathbf{J} betrachtet werden. Setzt man Gleichung (2.26) in Gleichung (2.14) ein, dann erhält man

$$\mu_0 (\mathbf{J}_P + \mathbf{J}_T) = \nabla \times (\mathbf{B}_P + \mathbf{B}_T). \quad (2.42)$$

Da nach den Gleichungen (2.28) und (2.35) die Rotation eines toroidalen Feldes poloidal ist, und die Rotation eines poloidalen Feldes toroidal ist, muß gelten:

$$\mathbf{J}_T = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_P = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \Lambda P_B \quad (2.43)$$

und

$$\mathbf{J}_P = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_T = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \Lambda T_B. \quad (2.44)$$

Das poloidale Magnetfeld ist folglich mit einem toroidalen Strom verknüpft und das toroidale Magnetfeld mit einem poloidalen Strom. Diese Feldpaare

$$(\mathbf{B}_P, \mathbf{J}_T) \quad \text{und} \quad (\mathbf{B}_T, \mathbf{J}_P) \quad (2.45)$$

sind nicht untereinander gekoppelt und bilden jeweils eine Mode, die durch ein skalares Potential eindeutig beschrieben werden kann. Als nächstes werden Differentialgleichungen für diese Moden hergeleitet.

Poloidale magnetische Mode

Setzt man für die Stromdichte der poloidalen magnetischen Mode $(\mathbf{B}_P, \mathbf{J}_T)$

$$\mathbf{J}_T = i\omega \Lambda [\sigma(r) P_B] = i\omega \sigma(r) \Lambda P_B \quad (2.46)$$

an, dann ist das zugehörige elektrische Feld

$$\mathbf{E}_T = i\omega \Lambda P_B, \quad (2.47)$$

das wie die Stromdichte ein toroidales Feld ist. Der Ansatz ist so gewählt, daß

$$\nabla \times \mathbf{E}_T = i\omega \nabla \times \Lambda P_B = -i\omega \mathbf{B}_P \quad (2.48)$$

gilt, also bereits die Maxwellgleichung (2.25) erfüllt wird. Andererseits folgt aus Gleichung (2.14) mit Gleichung (2.35)

$$\mu_0 \mathbf{J}_T = \nabla \times \mathbf{B}_P = \Lambda \nabla^2 P_B. \quad (2.49)$$

Der Vergleich mit Gleichung (2.46) führt bis auf Beiträge, für die $\Lambda g(r) = 0$ ist, schließlich auf die grundlegende Differentialgleichung

$$\nabla^2 P_B = i\omega \mu_0 \sigma(r) P_B \quad (2.50)$$

für das skalare Potential P_B der poloidalen magnetischen Mode $(\mathbf{B}_P, \mathbf{J}_T)$. Tatsächlich kann man zur rechten Seite noch eine Funktion $g(r)$ addieren, weil $\Lambda g(r) = 0$ gilt. Aus demselben Grund spielt diese Funktion keine Rolle für die Vektorfelder, die aus dem Potential P_B abgeleitet werden. Daher wird $g(r) = 0$ gewählt, vgl. Gleichung (2.34). Bei Gleichung (2.50) handelt sich um eine Diffusionsgleichung für P_B . Sie entspricht im wesentlichen der Diffusionsgleichung (2.24) in Abschnitt 2.4, wobei es zwei wesentliche Unterschiede gibt. Erstens tritt in Gleichung (2.50) die skalare Größe P_B , auf, in Gleichung (2.24) hingegen die vektorielle Größe \mathbf{B} . Zweitens gilt Gleichung (2.50) für eine beliebige radial-symmetrische Leitfähigkeitsverteilung $\sigma = \sigma(r)$, wohingegen Gleichung (2.24) nur für den Spezialfall $\sigma = \text{const.}$ hergeleitet wurde.

Toroidale magnetische Mode

Für die toroidale magnetische Mode $(\mathbf{B}_T, \mathbf{J}_P)$ gilt Gleichung (2.44)

$$\mathbf{J}_P = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \Lambda T_B. \quad (2.51)$$

Das zugehörige elektrische Feld im Mantel, in dem $\sigma(r) > 0$ vorausgesetzt wird, ist

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\mu_0 \sigma(r)} \nabla \times \Lambda T_B. \quad (2.52)$$

Im Fall der toroidalen Mode ist wegen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\mu_0} \left[\nabla \cdot \frac{1}{\sigma(r)} \right] \nabla \times \Lambda T_B \quad (2.53)$$

das elektrische Feld im allgemeinen nicht divergenzfrei und daher kein poloidales Vektorfeld.

Die Diffusionsgleichung für die toroidale Mode läßt sich aus der Betrachtung der Rotation des elektrischen Feldes gewinnen, für die einerseits

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{\mu_0 \sigma(r)} \nabla \times \nabla \times \Lambda T_B - \frac{1}{\mu_0} \left[\nabla \cdot \frac{1}{\sigma(r)} \right] \nabla \times \Lambda T_B \\ &= \frac{1}{\mu_0 \sigma(r)} \nabla^2 \Lambda T_B + \frac{1}{\mu_0 \sigma^2(r)} \frac{\partial \sigma(r)}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \left\{ \mathbf{r} \nabla^2 T_B - \nabla \left[\frac{\partial}{\partial r} (r T_B) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\mu_0 \sigma(r)} \Lambda \nabla^2 T_B - \frac{1}{\mu_0 r \sigma^2(r)} \frac{\partial \sigma(r)}{\partial r} \Lambda \left[\frac{\partial}{\partial r} (r T_B) \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

gilt, wobei die Umformung im ersten Schritt für den ersten Term durch Gleichung (2.35) mit T_B an Stelle von P_B und für den zweiten Term durch Gleichung (A.32) durchgeführt ist. Andererseits ist nach Gleichung (2.25)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}_T = i\omega \Lambda T_B. \quad (2.55)$$

Die Gleichungen (2.54) und (2.55) führen zusammen auf die Diffusionsgleichung für das Potential T_B der toroidalen magnetischen Mode

$$\nabla^2 T_B = i\omega \mu_0 \sigma(r) T_B + \frac{\sigma'(r)}{r \sigma(r)} \frac{\partial}{\partial r} (r T_B), \quad (2.56)$$

die wie Gleichung (2.50) nur bis auf eine additive Funktion $g(r)$ festgelegt ist, die aber keinen Einfluß auf die Vektorfelder hat, die sich aus T_B ergeben und daher gleich Null gesetzt werden kann. Verglichen mit der Diffusionsgleichung (2.50) für die poloidale magnetische Mode weist Gleichung (2.56) einen zusätzlichen Term auf. Bei konstanter elektrischer Leitfähigkeit $\sigma = \text{const.}$ verschwindet der zweite Term, und man erhält die einfachere Formel

$$\nabla^2 T_B = i\omega \mu_0 \sigma T_B \quad (2.57)$$

für diesen Spezialfall, in dem auch die vektorielle Diffusionsgleichung (2.24) gültig ist.

Die toroidale magnetische Mode wird im folgenden nicht verwendet, weil sie im Außenraum nicht in Erscheinung tritt. Es kann gezeigt werden, daß für eine Kugelfläche, auf der $J_r = 0$ gilt, $\mathbf{B}_T = 0$ ist, siehe z. B. Backus et al. (1996). Daß im gesamten Außenraum mit $\sigma = 0$ kein toroidales Magnetfeld existiert, wird auch am Ende des nächsten Abschnitts deutlich. Zwar wird versucht, mit Unterseekabeln die toroidale magnetische Mode zu untersuchen, was aber ein schwieriges Problem darstellt (Shimizu und Utada, 2004).

2.7 Poloidales Potential

Das poloidale Potential P_B erfüllt die Differentialgleichung (2.50). Speziell im Fall konstanter elektrischer Leitfähigkeit $\sigma = \text{const.}$ lautet die Differentialgleichung

$$\nabla^2 P_B = i\omega\mu_0\sigma P_B, \quad (2.58)$$

die mit dem Ansatz

$$P_B(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n f_n^m(r) Y_n^m(\vartheta, \varphi) \quad (2.59)$$

gelöst werden soll.

Der Ansatz verwendet die Funktionen f_n^m , die den r -abhängigen Anteil beschreiben, und Y_n^m , die mit Hilfe der elementaren Kugelflächenfunktionen

$$\Psi_n^{m,\gamma} = P_n^m(\cos \vartheta) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases} \quad (2.60)$$

mit $\gamma = c$ für $\cos(m\varphi)$ und $\gamma = s$ für $\sin(m\varphi)$

geschrieben werden können als

$$Y_n^m(\vartheta, \varphi) = A_n^m \Psi_n^{m,c} + B_n^m \Psi_n^{m,s}. \quad (2.61)$$

Ein zusätzlicher Summand mit $n = 0$ in Gleichung (2.59) hängt nur von r ab, und trägt nicht zu \mathbf{B}_P bei, wenn man Gleichung (2.27) anwendet.

Die elementaren Kugelflächenfunktionen $\Psi_n^{m,\gamma}$ erfüllen die Differentialgleichung

$$\Lambda^2 \Psi_n^{m,\gamma} + n(n+1) \Psi_n^{m,\gamma} = 0. \quad (2.62)$$

Sie sind also Eigenfunktionen des Λ^2 -Operators mit den Eigenwerten $n(n+1)$, siehe beispielsweise Joos (1989). Die P_n^m sind die zugeordneten Kugelfunktionen vom Grad n und von der Ordnung m , die hier in der Schmidtschen Normierung

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[P_n^m(\cos \vartheta) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases} \right]^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} \quad (2.63)$$

verwendet werden, bei der die rechte Seite nicht von der Ordnung m abhängt (z. B. Chapman und Bartels, 1962). In der Schmidtschen Normierung erfüllen die elementaren Kugelflächenfunktionen $\Psi_n^{m,\gamma}$ die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Psi_n^{m,\gamma} \Psi_{n'}^{m',\gamma'} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \begin{cases} \frac{4\pi}{2n+1} & \text{falls } n' = n, m' = m, \gamma' = \gamma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.64)$$

Setzt man den Ansatz (2.59) in die Differentialgleichung (2.58) ein, dann folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \nabla^2 [f_n^m(r) Y_n^m(\vartheta, \varphi)] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n i\omega\mu_0\sigma f_n^m(r) Y_n^m(\vartheta, \varphi). \quad (2.65)$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann mit Gleichung (A.24) umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \nabla^2 [f_n^m(r) Y_n^m(\vartheta, \varphi)] &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial}{\partial r} [f_n^m(r) Y_n^m(\vartheta, \varphi)] \right\} + \frac{1}{r^2} \Lambda^2 [f_n^m(r) Y_n^m(\vartheta, \varphi)] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r f_n^m(r) Y_n^m(\vartheta, \varphi)] - \frac{1}{r^2} n(n+1) f_n^m(r) Y_n^m(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (2.66)$$

wobei im letzten Schritt die Gleichungen (A.16) sowie (A.28) verwendet worden sind. Aus Gleichung (2.65) erhält man, wenn man mit r^2 multipliziert und beide Seiten zusammenfaßt,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ r \frac{d^2}{dr^2} [r f_n^m(r)] - n(n+1) f_n^m(r) - i\omega\mu_0\sigma r^2 f_n^m(r) \right\} Y_n^m(\vartheta, \varphi) = 0. \quad (2.67)$$

Multipliziert man Gleichung (2.67) mit $\Psi_{n'}^{m',\gamma'}$ und integriert anschließend über die Kugelfläche, dann folgt aufgrund der Orthogonalitätsrelation (2.64), daß für alle $n \geq 1$

$$r \frac{d^2}{dr^2} [r f_n^m(r)] - n(n+1) f_n^m(r) - i\omega\mu_0\sigma r^2 f_n^m(r) = 0 \quad (2.68)$$

gelten muß. Da die Ordnung m zunächst keine Rolle mehr spielt, wird der Index m weggelassen. Es ist

$$r \frac{d^2}{dr^2} [r f_n(r)] - n(n+1) f_n(r) - i\omega\mu_0\sigma r^2 f_n(r) = 0, \quad (2.69)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} [r f_n(r)] = \left[\frac{n(n+1)}{r^2} + i\omega\mu_0\sigma \right] r f_n(r). \quad (2.70)$$

Mit Hilfe von Gleichung (A.16) kann man (2.69) schreiben als

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} f_n(r) + 2r \frac{d}{dr} f_n(r) - [i\omega\mu_0\sigma r^2 + n(n+1)] f_n(r) = 0. \quad (2.71)$$

Mit den Substitutionen

$$k^2 = i\omega\mu_0\sigma, \quad (2.72)$$

$$z = kr, \quad (2.73)$$

$$w(z) = w(kr) = f_n(r) \quad (2.74)$$

und unter Berücksichtigung von

$$kw' = k \frac{\partial}{\partial z} w(z) = \frac{\partial}{\partial r} w(z) = \frac{\partial}{\partial r} f(r), \quad (2.75)$$

$$k^2 w'' = k^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} w(z) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} w(z) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r) \quad (2.76)$$

läßt sich die Gleichung (2.71) schreiben als

$$z^2 w'' + 2zw' - [z^2 + n(n+1)]w = 0. \quad (2.77)$$

Diese Differentialgleichung wird in Abramowitz und Stegun (1965, (10.2.1)) behandelt. Für $z \gg n$ werden ihre Lösungen unabhängig von n . Allgemein sind ihre Lösungen die modifizierten sphärischen Besselfunktionen, die hier mit $p_n(kr)$ und $q_n(kr)$ bezeichnet werden. Es handelt sich um die Funktionen

$$p_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{n+\frac{1}{2}}(z) \quad (\text{Abramowitz und Stegun, 1965, (10.2.2)}), \quad (2.78)$$

$$q_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} K_{n+\frac{1}{2}}(z) \quad (\text{Abramowitz und Stegun, 1965, (10.2.15)}). \quad (2.79)$$

Mit ihnen läßt sich die allgemeine Lösung von Gleichung (2.77) in der Form

$$w(z) = C_n p_n(z) + D_n q_n(z) \quad (2.80)$$

mit komplexen Koeffizienten C_n und D_n schreiben. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.69) ist entsprechend

$$f_n(r) = C_n p_n(kr) + D_n q_n(kr). \quad (2.81)$$

Über $k = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma}$ geht die konstante elektrische Leitfähigkeit ein.

Bevor die Lösung (2.81) für eine Schicht mit konstanter elektrischer Leitfähigkeit in den nächsten Abschnitten auf einen geschichteten Mantel erweitert wird, soll das Verhalten der Funktionen $p_n(kr)$ und $q_n(kr)$ näher betrachtet werden. Für $n = 1, 2$ sind sie gegeben durch

$$p_1(z) = -\frac{1}{z^2} \sinh z + \frac{1}{z} \cosh z, \quad q_1(z) = -\frac{\pi}{2z} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{z}\right), \quad (2.82)$$

$$p_2(z) = \left(\frac{3}{z^3} + \frac{1}{z}\right) \sinh z - \frac{3}{z^2} \cosh z, \quad q_2(z) = -\frac{\pi}{2z} e^{-z} \left(1 + 3\frac{1}{z} + 3\frac{1}{z^2}\right), \quad (2.83)$$

siehe Abramowitz und Stegun (1965, (10.2.13) und (10.2.17)). Abbildung 2.3 zeigt die modifizierten sphärischen Besselfunktionen für $1 \leq n \leq 5$ und reelles Argument x . In Gleichung (2.81) tritt das komplexe Argument $kr = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma} r$ auf. Entsprechend zeigt Abbildung 2.4 den Betrag und die Phase für das Argument $\sqrt{i} x$, wobei x reell ist. Für das asymptotische Verhalten der modifizierten sphärischen Besselfunktionen $p_n(z)$ bzw. $q_n(z)$ gilt für $z \rightarrow 0$ und $\text{Re}\{z\} > 0$

$$p_n(z) \rightarrow \frac{z^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}, \quad q_n(z) \rightarrow \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{z^{n+1}} \quad (2.84)$$

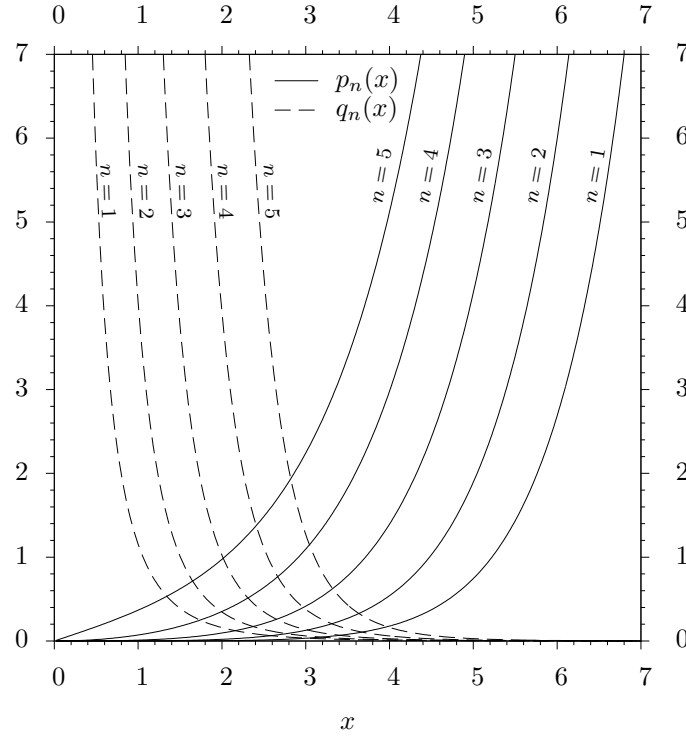


Abbildung 2.3: Modifizierte sphärische Besselfunktionen $p_n(x)$, $q_n(x)$ für reelles Argument x

(Abramowitz und Stegun, 1965, (10.2.5) und (10.2.6)). Für $z \rightarrow \infty$, $\text{Re}\{z\} > 0$ sind $p_n(z)$ und $q_n(z)$ unabhängig von n :

$$p_n(z) \rightarrow \frac{1}{2z} e^z, \quad q_n(z) \rightarrow \frac{\pi}{2z} e^{-z} \quad (2.85)$$

(Abramowitz und Stegun, 1965, (10.2.9) und (10.2.15)). Dieser Fall tritt für $z \gg n$ ein, also bei hoher elektrischer Leitfähigkeit oder hohen Frequenzen. Das Potential (und mit ihm die magnetische Flußdichte) wird in diesem Fall exponentiell gedämpft.

Da $|q_n(kr)|$ mit wachsendem r fällt, vgl. Abbildung 2.4, kann $q_n(kr)$ als interner Anteil interpretiert werden. Entsprechend ist $p_n(kr)$ als externer Anteil aufzufassen, dessen Betrag kleiner wird, wenn r abnimmt. Es ist zweckmäßig, $f_n(r)$ als Summe des internen und externen Anteils in der Form

$$f_n(r) = f_n^i(r) + f_n^e(r) \quad (2.86)$$

mit $f_n^e(r) = C_n p_n(kr)$ und $f_n^i(r) = D_n q_n(kr)$

aufzufassen. Entsprechend läßt sich das Potential P_B als Summe eines internen und eines externen Anteils schreiben. Aus Gleichung (2.59) wird dann

$$P_B = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^i(r) \sum_{m=0}^n \left[A_n^{mi} \cos(m\varphi) + B_n^{mi} \sin(m\varphi) \right] P_n^m(\cos \vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^e(r) \sum_{m=0}^n \left[A_n^{me} \cos(m\varphi) + B_n^{me} \sin(m\varphi) \right] P_n^m(\cos \vartheta) \quad (2.87)$$

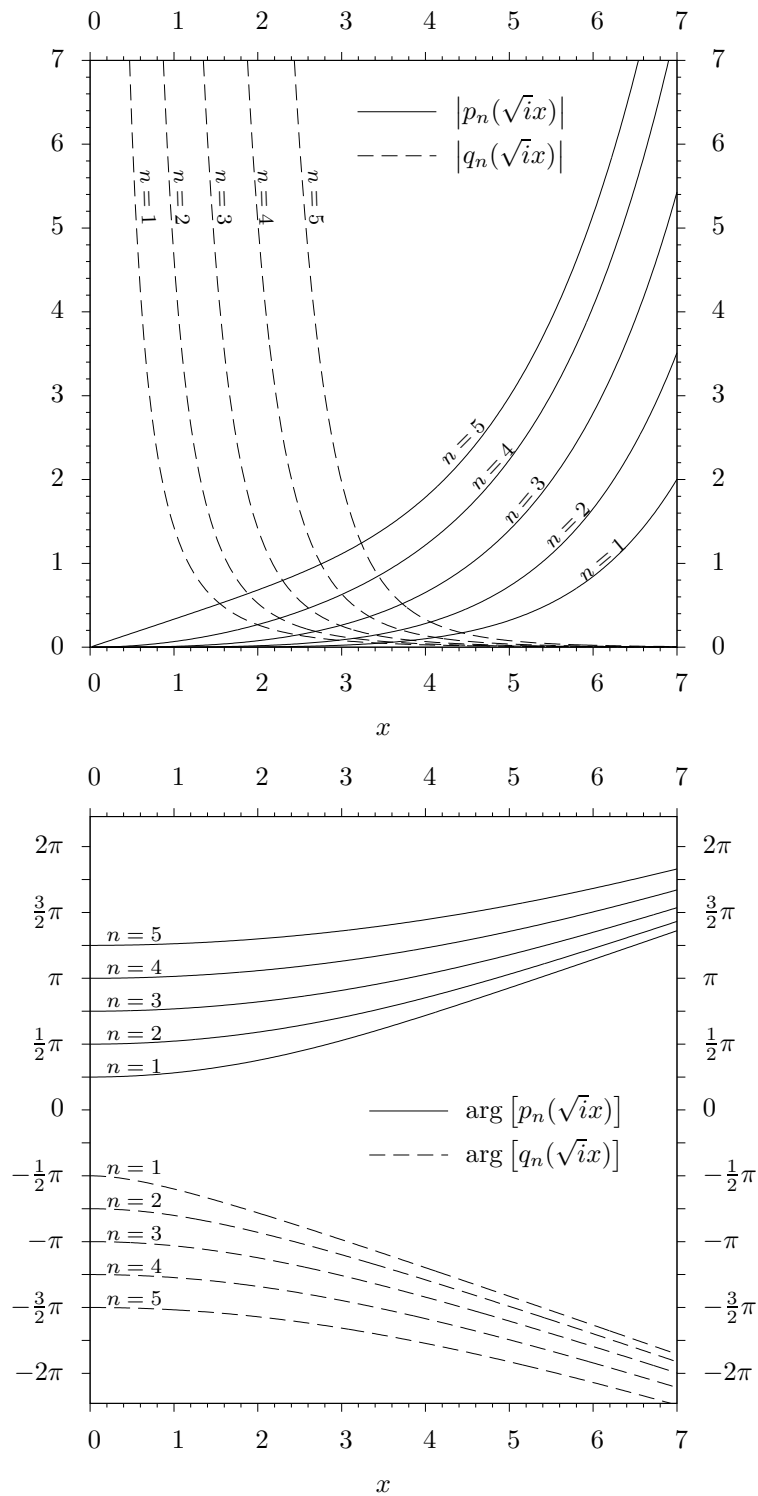


Abbildung 2.4: Betrag (oben) und Phase (unten) der modifizierten sphärischen Besselfunktionen $p_n(\sqrt{ix})$ und $q_n(\sqrt{ix})$

mit den Koeffizienten A_n^{mi} und B_n^{mi} für den internen Anteil sowie A_n^{me} und B_n^{me} für den externen Anteil. Verwendet man zur Abkürzung die Kugelflächenfunktionen

$$S_n^i(\vartheta, \varphi) := \sum_{m=0}^n \left[A_n^{mi} \cos(m\varphi) + B_n^{mi} \sin(m\varphi) \right] P_n^m(\cos \vartheta), \quad (2.88)$$

$$S_n^e(\vartheta, \varphi) := \sum_{m=0}^n \left[A_n^{me} \cos(m\varphi) + B_n^{me} \sin(m\varphi) \right] P_n^m(\cos \vartheta), \quad (2.89)$$

die ebenfalls

$$\Lambda^2 S_n(\vartheta, \varphi) + n(n+1) S_n(\vartheta, \varphi) = 0 \quad (2.90)$$

erfüllen (mit $S_n = S_n^i$ bzw. $S_n = S_n^e$), vgl. Gleichung (2.62), dann wird aus Gleichung (2.87)

$$P_B = \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n^i(r) S_n^i(\vartheta, \varphi) + f_n^e(r) S_n^e(\vartheta, \varphi) \right]. \quad (2.91)$$

Ein wichtiger Sonderfall tritt ein, wenn die Winkelabhängigkeit des externen und des internen Anteils gleich sind, also $S_n^i = S_n^e =: S_n$ gilt. Das ist z. B. dann der Fall, wenn in einem geschichteten Mantel durch Quellen im Kern Ströme induziert werden. Das Magnetfeld im Mantel wird dann durch interne und externe Anteile beschrieben, die die gleiche Abhängigkeit von (ϑ, φ) besitzen wie das induzierende Feld aus dem Kern. Gleichung (2.91) nimmt in diesem Fall die einfache Form

$$P_B = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) S_n(\vartheta, \varphi) \quad (2.92)$$

an. Der Anteil vom Grad n an der magnetische Flußdichte \mathbf{B}_P in Gleichung (2.38) kann in diesem Fall mit Hilfe von Gleichung (2.92) durch $f_n(r)$ und $S_n(\vartheta, \varphi)$ ausgedrückt werden. Für die einzelnen Komponenten und Grad n gilt

$$B_{Pnr} = -\frac{1}{r} \Lambda^2 P_B = -\frac{n(n+1)}{r} f_n(r) S_n(\vartheta, \varphi), \quad (2.93)$$

$$B_{Pn\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} (r P_B) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r f_n(r)] \frac{\partial}{\partial \vartheta} S_n(\vartheta, \varphi), \quad (2.94)$$

$$B_{Pn\varphi} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} (r P_B) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r f_n(r)] \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} S_n(\vartheta, \varphi). \quad (2.95)$$

Einen bekannten Spezialfall erhält man für $k = 0$, der für einen nichtleitenden Bereich ($\sigma = 0$) oder ein statisches Feld ($\omega = 0$) gilt. In diesem Fall vereinfacht sich Gleichung (2.69) zu

$$r \frac{d^2}{dr^2} [r f_n(r)] - n(n+1) f_n(r) = 0 \quad (2.96)$$

mit den bekannten Lösungen

$$f_n^e(r) = C_n r^n \quad \text{und} \quad f_n^i(r) = \frac{D_n}{r^{n+1}}. \quad (2.97)$$

Da keine Ströme fließen, kann die magnetische Flußdichte \mathbf{B}_P einerseits als Gradient eines skalaren Potentials dargestellt werden

$$\mathbf{B}_P = -\nabla\Phi. \quad (2.98)$$

Dies ist die bekannte Darstellung des Magnetfeldes im Außenraum mit der Gaußschen Kugelfunktionsentwicklung des Potentials

$$\begin{aligned} \Phi = & a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \left[g_n^{mi} \cos(m\varphi) + h_n^{mi} \sin(m\varphi) \right] P_n^m(\cos\vartheta) \\ & + a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sum_{m=0}^n \left[g_n^{me} \cos(m\varphi) + h_n^{me} \sin(m\varphi) \right] P_n^m(\cos\vartheta), \end{aligned} \quad (2.99)$$

siehe z. B. Kertz (1969). Die Gauß-Koeffizienten g_n^{mi} und h_n^{mi} beziehen sich auf den internen Anteil (erste Zeile), während sich g_n^{me} und h_n^{me} auf den externen Anteil beziehen (zweite Zeile). Andererseits gilt für \mathbf{B}_P die Darstellung (2.27), die unter Anwendung von Gleichung (A.32) auf

$$\mathbf{B}_P = -\nabla \times \mathbf{A} P_B = -\mathbf{r} \nabla^2 P_B + \nabla \left[\frac{\partial}{\partial r} (r P_B) \right] = \nabla \left[\frac{\partial}{\partial r} (r P_B) \right] \quad (2.100)$$

führt, weil aus Gleichung (2.50) mit $\sigma = 0$ folgt, daß $\nabla^2 P_B = 0$ ist. Der Vergleich von Gleichung (2.98) und Gleichung (2.100) ergibt bis auf eine additive Konstante, die gleich Null gesetzt werden kann,

$$\Phi = -\frac{\partial}{\partial r} (r P_B). \quad (2.101)$$

Setzt man P_B aus Gleichung (2.87) mit f_n^e und f_n^i aus Gleichung (2.97) ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} \Phi = & - \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{D_n}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n \left[A_n^{mi} \cos(m\varphi) + B_n^{mi} \sin(m\varphi) \right] P_n^m(\cos\vartheta) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) C_n r^n \sum_{m=0}^n \left[A_n^{me} \cos(m\varphi) + B_n^{me} \sin(m\varphi) \right] P_n^m(\cos\vartheta). \end{aligned} \quad (2.102)$$

Wählt man

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}, & D_n &= -\frac{a^{n+2}}{n}, \\ A_n^{mi} &= g_n^{mi}, & B_n^{mi} &= h_n^{mi}, & A_n^{me} &= g_n^{me}, & B_n^{me} &= h_n^{me}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

dann geht Gleichung (2.102) über in Gleichung (2.99). Damit ist nebenbei gezeigt, daß das Magnetfeld im Außenraum mit $\sigma = 0$ ein poloidales Feld ist, d. h. dort gilt $\mathbf{B}_T = 0$ (vgl. die abschließende Anmerkung zur toroidalen Mode in Abschnitt 2.6).

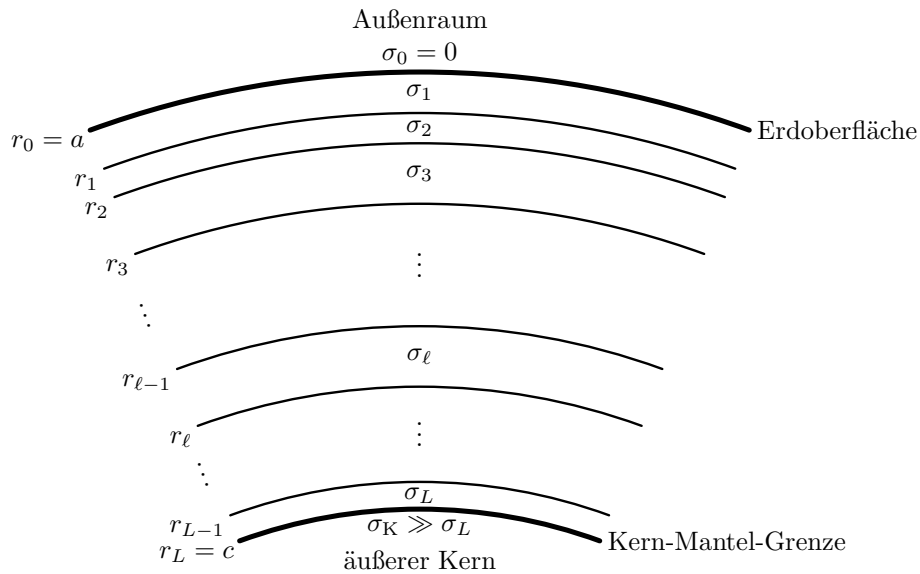


Abbildung 2.5: Das Modell eines geschichteten Mantels besteht aus L Schichten mit homogener elektrischer Leitfähigkeit. Nach oben schließt sich der nichtleitende Außenraum an.

2.8 Übertragungsfunktionen für den geschichteten Mantel

Die Beschreibung des poloidalen Potentials in einer Schicht mit konstanter elektrischer Leitfähigkeit soll im folgenden auf einen Mantel ausgedehnt werden, der aus L Schichten besteht, wobei sich die ℓ -te Schicht zwischen $r_{\ell-1}$ und r_{ℓ} befindet und die konstante elektrische Leitfähigkeit σ_{ℓ} besitzt, vgl. Abbildung 2.5. Die äußere Grenze ist $r_0 = a$, der Erdradius, und die innere Grenze ist r_L , der Radius des äußeren Kerns. Nach außen schließt sich der nichtleitende Außenraum mit $\sigma_0 = 0$ an und nach innen der Kern, der als ideal leitend angenommen wird.

Die Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen werden betrachtet, um nachfolgend das poloidale Potential von einer Schicht in die nächste fortzusetzen. Damit ist es dann möglich, das Potential im gesamten Mantel anzugeben, wenn es an der Kern-Mantel-Grenze bekannt ist.

2.8.1 Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen

Im folgenden wird das Verhalten von Feldern und Potentialen an Grenzflächen untersucht. Dazu werden die Bezeichnungen Ψ^- für den Wert einer vektoriellen oder skalaren Größe an einer Grenzfläche bei Annäherung von unten und Ψ^+ bei Annäherung von oben eingeführt. Allgemein lauten die Stetigkeitsbedingungen für die magnetische Flußdichte \mathbf{B} bzw. die magnetische Feldstärke \mathbf{H} an Grenzflächen mit der Flächennormalen $\hat{\mathbf{n}}$, wenn

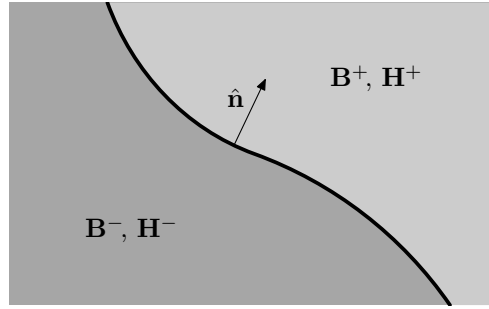


Abbildung 2.6: Zwei Bereiche mit \mathbf{B}^+ , \mathbf{H}^+ bzw. \mathbf{B}^- , \mathbf{H}^- grenzen aneinander, die Normale der Grenzfläche ist $\hat{\mathbf{n}}$.

kein Flächenstrom fließt,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = 0, \quad (2.104)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) = 0, \quad (2.105)$$

vgl. Abbildung 2.6. Da im Erdmantel $\mu_r = 1$ vorausgesetzt wird, also $\mu = \text{const.}$ gilt, kann die letzte Gleichung auch als

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = 0 \quad (2.106)$$

geschrieben werden. In diesem Fall ist die magnetische Flußdichte \mathbf{B} stetig. Dies gilt für die Grenzen innerhalb des Mantels und die Grenze zum Außenraum.

Anders verhält es sich bei infinitesimal dünnen Schichten und an der Grenze zum Kern, der hier als ideal leitend angenommen wird. In diesen Fällen muß die Flächenstromdichte \mathbf{K} berücksichtigt werden, und an die Stelle von Gleichung (2.106) tritt

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = \mu_0 \mathbf{K}, \quad (2.107)$$

siehe Jackson (1999). Die Flächenstromdichte \mathbf{K} auf der Oberfläche des Kerns ist so beschaffen, daß keine Magnetfelder von außen in den Kern eindringen können. Die infinitesimal dünne Schicht ist eine Idealisierung, bei der die Dicke d der Schicht gegen 0 geht, und gleichzeitig

$$\mathbf{K} = \int_0^d \mathbf{J}_s(r) dr \quad (2.108)$$

konstant bleibt, wobei $\mathbf{J}_s(r)$ die Stromdichte tangential zur Schicht ist.

Die Grenzflächen des geschichteten Mantels sind konzentrische Kugelflächen, so daß der Flächennormaleneinheitsvektor $\hat{\mathbf{n}}$ mit dem Radiuseinheitsvektor $\hat{\mathbf{r}}$ zusammenfällt. Daher nimmt Gleichungen (2.104) die Form

$$B_r^+ - B_r^- = 0 \quad (2.109)$$

an, und mit der r -Komponente aus Gleichung (2.38) folgt

$$\Lambda^2 P_B^+ - \Lambda^2 P_B^- = 0. \quad (2.110)$$

Dies führt mit den Gleichungen (2.92) und (2.90) auf

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left[f_n^+(r) S_n^+(\vartheta, \varphi) - f_n^-(r) S_n^-(\vartheta, \varphi) \right] = 0. \quad (2.111)$$

Da dies für beliebige Potentiale auf der ganzen Kugelfläche erfüllt sein muß, folgt zunächst

$$S_n^+(\vartheta, \varphi) = S_n^-(\vartheta, \varphi) \quad (2.112)$$

und weiter

$$f_n^+(r) = f_n^-(r). \quad (2.113)$$

Entsprechend folgt aus der Gleichung (2.106) und der ϑ -Komponente von \mathbf{B}_P aus Gleichung (2.38) die Stetigkeit von $f'_n(r)$. Es ist

$$\left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} (r P_B^+) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} (r P_B^-) \right] = 0 \quad (2.114)$$

bzw.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{d}{dr} [r f_n^+(r)] \frac{\partial}{\partial \vartheta} S_n^+(\vartheta, \varphi) - \frac{d}{dr} [r f_n^-(r)] \frac{\partial}{\partial \vartheta} S_n^-(\vartheta, \varphi) \right\} = 0. \quad (2.115)$$

Dies führt zusammen mit den Gleichungen (2.112) und (2.113) auf

$$\frac{d}{dr} f_n^+(r) = \frac{d}{dr} f_n^-(r). \quad (2.116)$$

Also sind $f_n(r)$, $f'_n(r)$ und $S_n(\vartheta, \varphi)$ an den Grenzflächen stetig und mit ihnen folglich auch P_B und $\frac{\partial}{\partial r} P_B$.

2.8.2 Fortsetzung des Potentials

Im folgenden wird gezeigt, wie das Potential P_B von einer Schicht des Mantelmodells in Abbildung 2.5 in die nächste fortgesetzt werden kann. Da $S_n(\vartheta, \varphi)$ an Schichtgrenzen stetig ist, siehe Gleichung (2.112), und nicht von ω abhängt, genügt es, den radialen Anteil $f_n(r)$ des Potentials zu betrachten.

Die elektrische Leitfähigkeit der ℓ -ten Schicht, die sich von $r_{\ell-1}$ bis r_ℓ erstreckt, sei σ_ℓ , vgl. Abbildung 2.7, dann ist

$$k_\ell = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_\ell}, \quad (2.117)$$

und es gilt (vgl. Gleichungen (2.81))

$$\begin{aligned} f_n(r) &= C_{n,\ell} p_{n,\ell}(k_\ell r) + D_{n,\ell} q_{n,\ell}(k_\ell r), \\ \frac{1}{k_\ell} f'_n(r) &= C_{n,\ell} p'_{n,\ell}(k_\ell r) + D_{n,\ell} q'_{n,\ell}(k_\ell r). \end{aligned} \quad (2.118)$$

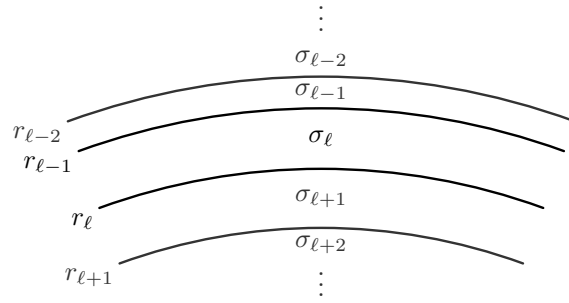


Abbildung 2.7: Die Funktion $f_n(r)$, die den vom Radius r abhängigen Teil des Potentials P_B beschreibt, wird durch Bereiche mit homogener elektrischer Leitfähigkeit σ_{ℓ} von der Schichtgrenze bei $r_{\ell-1}$ zur Schichtgrenze bei r_{ℓ} fortgesetzt.

An der oberen Schichtgrenze $r_{\ell-1}$ seien f_n und f'_n bekannt, dann erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_n(r_{\ell-1}) &= C_{n,\ell} p_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) + D_{n,\ell} q_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}), \\ \frac{1}{k_{\ell}} f'_n(r_{\ell-1}) &= C_{n,\ell} p'_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) + D_{n,\ell} q'_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) \end{aligned} \quad (2.119)$$

für die noch unbekannten Koeffizienten $C_{n,\ell}$ und $D_{n,\ell}$. Wendet man die Cramersche Regel zur Lösung dieses Gleichungssystem an, dann erhält man für die Koeffizienten

$$C_{n,\ell} = \frac{Z_C}{N}, \quad D_{n,\ell} = \frac{Z_D}{N}, \quad (2.120)$$

mit

$$Z_C = \begin{vmatrix} f_n(r_{\ell-1}) & q_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) \\ \frac{1}{k_{\ell}} f'_n(r_{\ell-1}) & q'_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) \end{vmatrix}, \quad (2.121)$$

$$Z_D = \begin{vmatrix} p_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) & f_n(r_{\ell-1}) \\ p'_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) & \frac{1}{k_{\ell}} f'_n(r_{\ell-1}) \end{vmatrix}, \quad (2.122)$$

$$N = \begin{vmatrix} p_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) & q_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) \\ p'_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) & q'_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) \end{vmatrix} = -\frac{\pi}{2 k_{\ell}^2 r_{\ell-1}^2}. \quad (2.123)$$

N ist gerade die Wronski-Determinante der modifizierten sphärischen Besselfunktionen $p_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell})$ und $q_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell})$, siehe Abramowitz und Stegun (1965, (10.2.8)). Setzt man die Koeffizienten in Gleichung (2.118) ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} f_n(r) &= \frac{\pi}{2 k_{\ell}^2 r_{\ell-1}^2} \left\{ f_n(r_{\ell-1}) \left[p'_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) q_{n,\ell}(k_{\ell} r) - q'_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) p_{n,\ell}(k_{\ell} r) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{k_{\ell}} f'_n(r_{\ell-1}) \left[p_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) q_{n,\ell}(k_{\ell} r) - q_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) p_{n,\ell}(k_{\ell} r) \right] \right\}, \\ f'_n(r) &= \frac{\pi k_{\ell}}{2 k_{\ell}^2 r_{\ell-1}^2} \left\{ \left[p'_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) q'_{n,\ell}(k_{\ell} r) - q'_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) p'_{n,\ell}(k_{\ell} r) \right] f_n(r_{\ell-1}) \right. \\ &\quad \left. - \left[p_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) q'_{n,\ell}(k_{\ell} r) - q_{n,\ell}(k_{\ell} r_{\ell-1}) p'_{n,\ell}(k_{\ell} r) \right] \frac{1}{k_{\ell}} f'_n(r_{\ell-1}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Dies erlaubt die Berechnung von $f_n(r)$ und $f'_n(r)$ in der gesamten ℓ -ten Schicht und speziell auch an der Grenzfläche $r = r_\ell$ zur $(\ell+1)$ -ten Schicht. Daraus lassen sich wiederum die Koeffizienten $C_{n,\ell+1}$ und $D_{n,\ell+1}$ bestimmen, mit denen $f_n(r)$ und $f'_n(r)$ an der nächsten Grenzfläche $r = r_{\ell+1}$ berechnet werden können. Die sukzessive Vorgehensweise ermöglicht die Bestimmung des Potentials $P_B(r=c, \vartheta, \varphi)$ an der Kern-Mantel-Grenze aus einem vorgegebenen Potential $P_B(r=a, \vartheta, \varphi)$ an der Erdoberfläche. Im Außenraum muß $\mathbf{B}_P = 0$ für $r \rightarrow \infty$ sein. Daher muß dort $C_{n,0} = 0$ sein. Es genügt die Vorgabe von B_r an der Erdoberfläche, um zunächst $D_{n,0}$ festzulegen und damit alle Komponenten sowohl im Außenraum als auch im gesamten Mantel bis zur Kern-Mantel-Grenze.

Die Vorgabe von $B_{nr}(a)$ hat den Vorteil, daß man sofort $C_{n,0} = 0$ einbringen kann. Ebenso gut kann man $B_{nr}(c)$ an der Kern-Mantel-Grenze vorgeben, und $B_{nr}(a)$ an der Erdoberfläche bestimmen.

2.8.3 Übertragungsfunktionen

Mit dem Ergebnis des letzten Abschnitts ist es möglich, die Übertragungsfunktionen der radialen und der tangentialen Komponente zu definieren, die den magnetischen Fluß an der Erdoberfläche $r = a$ ins Verhältnis setzen zum magnetischen Fluß an der Kern-Mantel-Grenze $r = c$. Mit Hilfe der Gleichungen (2.93) bis (2.95) für die Darstellung der Komponenten des poloidalen Magnetfeldes \mathbf{B}_n vom Grad n (auf den Index P wird jetzt verzichtet, weil nur noch das poloidale Magnetfeld betrachtet wird) können die Übertragungsfunktionen

$$\Gamma_n^R(\omega) := \frac{B_{nr}(a, \vartheta, \varphi; \omega)}{B_{nr}(c, \vartheta, \varphi; \omega)} = \frac{c f_n(a)}{a f_n(c)} \quad \text{und} \quad (2.125)$$

$$\Gamma_n^T(\omega) := \frac{B_{n\vartheta}(a, \vartheta, \varphi; \omega)}{B_{n\vartheta}(c, \vartheta, \varphi; \omega)} = \frac{B_{n\varphi}(a, \vartheta, \varphi; \omega)}{B_{n\varphi}(c, \vartheta, \varphi; \omega)} = \frac{c \frac{d}{dr} [r f_n(r)] \Big|_{r=a}}{a \frac{d}{dr} [r f_n(r)] \Big|_{r=c}} \quad (2.126)$$

definiert werden. Die Übertragungsfunktionen $\Gamma_n^T(\omega)$ der tangentialen Komponenten lassen sich mit Hilfe der Übertragungsfunktionen $\Gamma_n^R(\omega)$ der radialen Komponente ausdrücken als

$$\Gamma_n^T(\omega) = \frac{c f_n(a) + a f'_n(a)}{a f_n(c) + c f'_n(c)} = \Gamma_n^R(\omega) \frac{1 + a f'_n(a)/f_n(a)}{1 + c f'_n(c)/f_n(c)}. \quad (2.127)$$

Für den nichtleitenden Mantel, $\sigma = 0$, folgt aus Gleichung (2.97) und $f_n(r) = f_n^i(r)$

$$\Gamma_n^R(\omega) = \Gamma_n^T(\omega) = (c/a)^{n+2}. \quad (2.128)$$

Den gleichen Wert erhält man für ein stationäres Feld in einem elektrisch leitenden Mantel, unabhängig von der Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(r)$ gilt

$$\Gamma_n(0) := \Gamma_n^R(0) = \Gamma_n^T(0) = (c/a)^{n+2}. \quad (2.129)$$

Dies ist die geometrische Abschwächung, die exponentiell vom Grad n abhängt. Sie tritt deutlich im Mautersberger-Lowes-Spektrum (siehe z. B. Backus et al., 1996) zutage, dessen Verlauf sie für $n \leq 10$ prägt, vgl. Abbildung 5.16 auf Seite 136. Die geometrische

Abschwächung tritt unabhängig von der Frequenz ω auf. Die reine elektromagnetische Dämpfung ist gegeben durch

$$\bar{\Gamma}_n^R(\omega) = \Gamma_n^R(\omega)/\Gamma_n(0) \quad \text{bzw.} \quad \bar{\Gamma}_n^T(\omega) = \Gamma_n^T(\omega)/\Gamma_n(0). \quad (2.130)$$

Im folgenden bezeichnen $B_n(r, t)$ bzw. $B_n(r, \omega)$ die generischen Komponenten der magnetischen Flußdichte und $\Gamma_n(\omega)$ die generische Version der Übertragungsfunktionen (2.125) und (2.126), wobei die Abhängigkeit von ϑ und φ nicht mehr als Argument mitgeführt werden soll. Mit ihnen läßt sich die Berechnung der magnetischen Flußdichte an der Erdoberfläche aus der vorgegebenen Flußdichte an der Kern-Mantel-Grenze übersichtlich in folgender Form schreiben:

$$B_n(a, \omega) = \Gamma_n(\omega) B_n(c, \omega) \quad \text{mit} \quad \Gamma_n(0) = (c/a)^{n+2}. \quad (2.131)$$

Die Übertragungsfunktionen $\Gamma_n(\omega)$ sind der Ausgangspunkt für die Kapitel 3 und 4, die sich mit dem geschichteten Mantel auseinandersetzen, und sind eine wichtige Komponente bei der Betrachtung des lateral inhomogenen Mantels in Kapitel 5. Sie sollen in den letzten beiden Abschnitten dieses Kapitels deshalb noch näher untersucht werden.

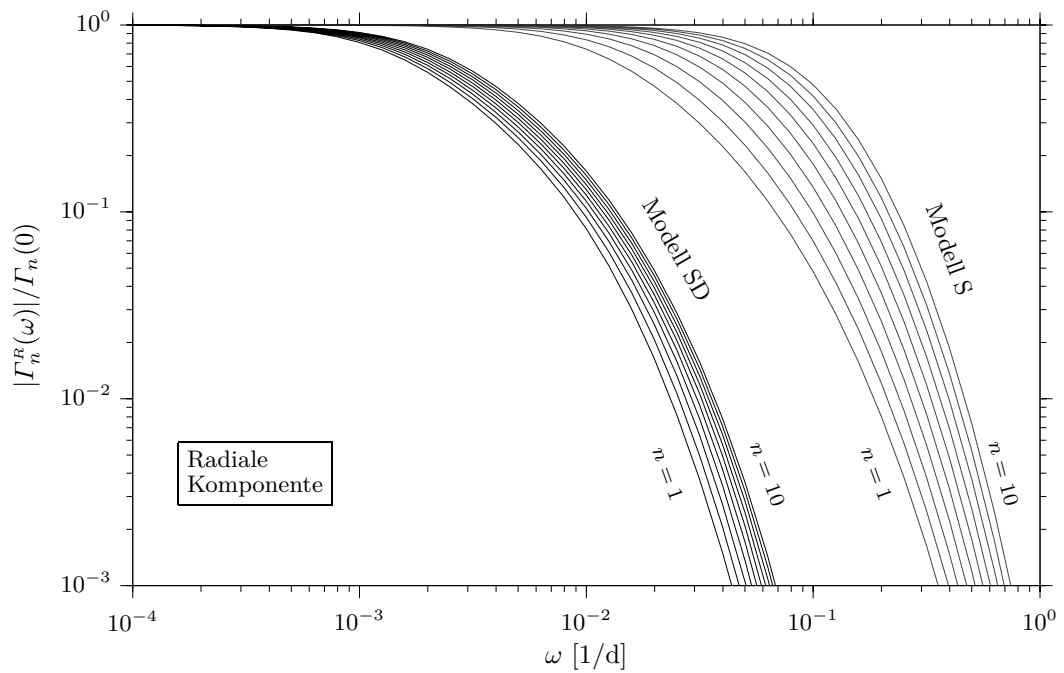
2.9 Harmonische Anregung

Die Untersuchung der Übertragungsfunktionen $\Gamma_n(\omega)$ entspricht der Frage nach dem Einfluß des Mantels bei harmonischer Anregung. Schreibt man die komplexen Übertragungsfunktionen in der Form

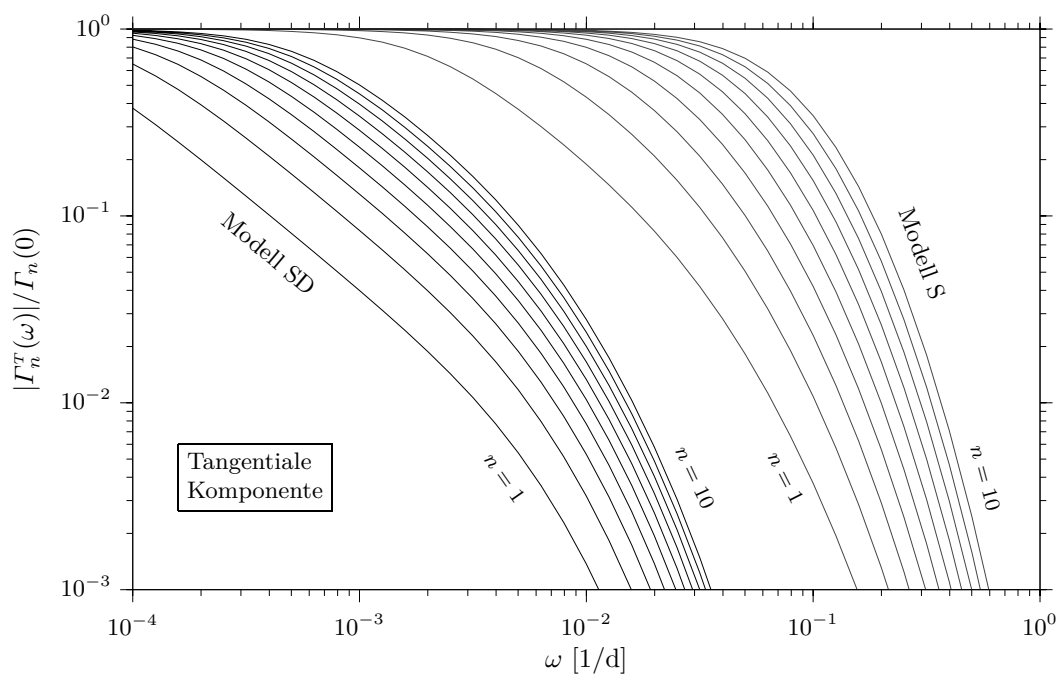
$$\Gamma_n(\omega) = |\Gamma_n(\omega)| \exp[i\omega t - \alpha_n(\omega)], \quad (2.132)$$

dann hat man zum einen die reellwertige Abschwächung $|\Gamma_n(\omega)|$ und zum anderen die Phasenverzögerung $\alpha_n(\omega)$. Da das Feld an der Erdoberfläche dem an der Kern-Mantel-Grenze nachfolgt, ist $\alpha_n(\omega) \geq 0$. Der Betrag der Übertragungsfunktion $|\Gamma_n(\omega)|$ setzt sich zusammen aus der geometrischen Abschwächung $\Gamma_n(0) = (c/a)^{n+2}$ und der elektromagnetischen Dämpfung $|\Gamma_n(\omega)|/\Gamma_n(0)$, siehe Gleichung (2.130). Abbildung 2.8 zeigt die elektromagnetische Dämpfung durch die in Abschnitt 1.4 beschriebenen Modelle S und SD (siehe Abbildungen 1.10 und 1.11). Der elektrisch leitende Mantel wirkt als Tiefpaßfilter, der sich bei sehr niedrigen Frequenzen ω nicht auswirkt und hohe Frequenzen stark dämpft. Für $\omega \geq 1 \text{ d}^{-1}$ ist $|\Gamma_n(\omega)|/\Gamma_n(0) < 10^{-3}$ für beide Komponenten und $n \leq 10$. Derart hohe Frequenzen werden also praktisch herausgefiltert, wobei fraglich ist, ob diese Frequenzen überhaupt nennenswert im magnetischen Feld des Kerns vertreten sind. Das Modell SD, bei dem die elektrische Leitfähigkeit in der D''-Schicht erhöht ist, weist erwartungsgemäß die stärkere Dämpfung auf.

Auffällig in Abbildung 2.8a ist die Abhängigkeit vom Grad n , die für Modell S ausgeprägter ist als für Modell SD. Überhaupt ist im Fall der radialen Komponente der Unterschied zwischen den Modellen kleiner als man zunächst vermuten könnte. In die Diffusionsgleichung (2.50) geht das Produkt $\omega\sigma(r)$ ein. Erhöht man die Leitfähigkeit des Modells S beispielsweise überall um einen Faktor 10, dann erhält man die elektromagnetische Dämpfung in Abbildung 2.8a dadurch, daß man die Kurven des Modells S um



(a) elektromagnetische Dämpfung der radialen Komponente



(b) elektromagnetische Dämpfung der tangentialen Komponente

Abbildung 2.8: Elektromagnetische Dämpfung $|F_n^R(\omega)|/F_n(0)$ bzw. $|F_n^T(\omega)|/F_n(0)$, jeweils für die Modelle S und SD

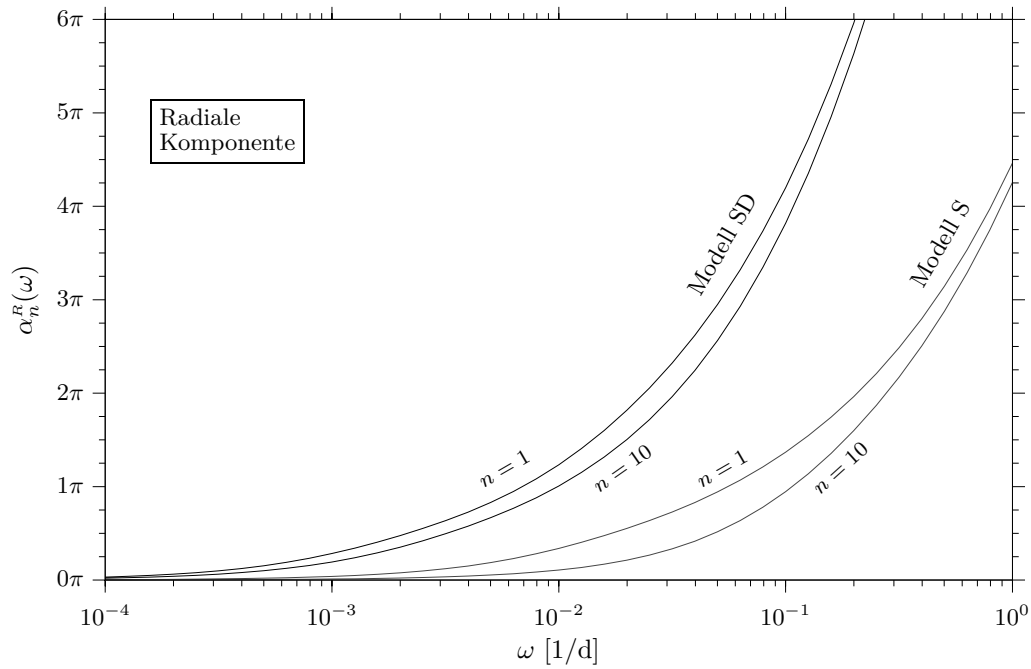


Abbildung 2.9: Phasenverzögerung $\alpha_n^R(\omega)$ der radialen Komponenten für die Modelle S und SD

eine Dekade zu kleineren Frequenzen hin verschiebt. Die integrierten Leitfähigkeiten der Modelle S und SD unterscheiden sich um etwa den Faktor 40 (12.5 S bzw. 510 S). Käme es nur auf die integrierte Leitfähigkeit an, dann müßten die Kurven des Modells SD zusammenfallen mit den um 1.6 Dekaden zu kleineren Frequenzen verschobenen Kurven des Modells S, was für die radiale Komponente offensichtlich nicht der Fall ist. Daraus kann man bereits schließen, daß die Abhängigkeit der Leitfähigkeitsverteilung vom Radius r wichtig ist. Bei der tangentialen Komponente (Abbildung 2.8b) ist die n -Abhängigkeit beim Modell SD im Verhältnis größer als bei der radialen Komponente. Der Vergleich von $|\Gamma_n^R(\omega)|/\Gamma_n(0)$ und $|\Gamma_n^T(\omega)|/\Gamma_n(0)$ zeigt, daß die tangentiale Komponente stärker gedämpft wird als die radiale.

Abbildung 2.9 zeigt die Phasenverzögerungen $\alpha_n^R(\omega)$ für die radiale Komponente. In ihr sind nur die Verläufe für $n = 1$ und $n = 10$ wiedergegeben, weil die Schar der Kurven für $n = 1, \dots, 10$ sehr dicht liegt. Die Phasenverzögerungen erreichen Werte von ca. 2.5π bis 4π für elektromagnetische Dämpfungen mit $|\Gamma_n^R(\omega)|/\Gamma_n(0) > 10^{-3}$, wie der Vergleich mit Abbildung 2.8a ergibt.

Üblicherweise wird bei der Betrachtung des internen Magnetfeldes nicht die Frequenz ω verwendet, sondern die Periode T . Entsprechend zeigt Abbildung 2.10 $|\Gamma_n^R(2\pi/T)|/\Gamma_n(0)$ über T , wobei die elektromagnetische Dämpfung in diesem Fall linear aufgetragen ist. Die Kurven steigen zunächst vergleichsweise steil an und nähern sich nur langsam dem Wert 1. Dies Verhalten wird durch die logarithmische Darstellung der Periode etwas verschleiert. Das Modell S kann für $T > 2000$ d ≈ 5.5 a als durchlässig angesehen werden, das Modell SD für $T > 20\,000$ d ≈ 55 a. Das sind vergleichsweise kurze Perioden, wenn man bedenkt, daß es Spekulationen über einen Einfluß des Mantels auf Feldumkehrungen gibt, die typisch auf Zeitskalen von etwa 1000 a ablaufen (Merrill et al., 1996).

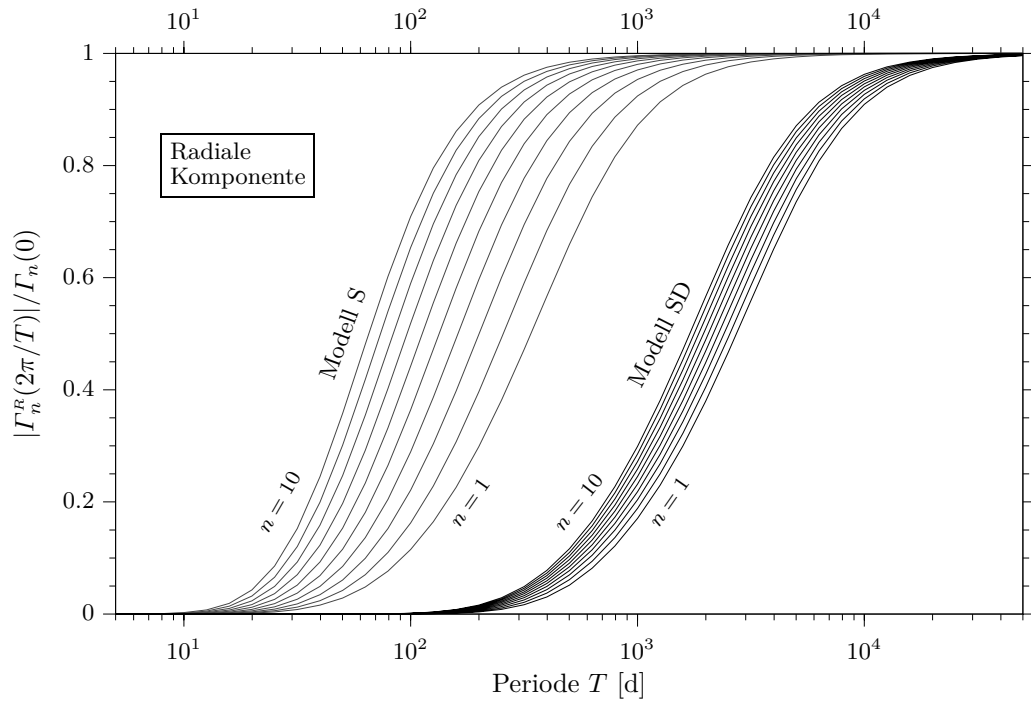


Abbildung 2.10: Elektromagnetische Dämpfung der Modelle S und SD als Funktion der Periode T

2.10 Beliebige Anregungen

Die Kenntnis der Übertragungsfunktionen erlaubt mit Hilfe der Fourier-Transformation für eine beliebige Anregung an der Kern-Mantel-Grenze die Berechnung des zeitlichen Verlaufs an der Erdoberfläche. Bezeichnet $G(t)$ eine Funktion im Zeitbereich und $G(\omega)$ ihre Fourier-Transformierte im Frequenzbereich, dann läßt sich die Fourier-Transformation mit den Gleichungen

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{und} \quad G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.133)$$

ausführen. Im Frequenzbereich ist der Zusammenhang zwischen der magnetischen Flußdichte an der Kern-Mantel-Grenze $B_n(c, \omega)$ und der Erdoberfläche $B_n(a, \omega)$ gegeben durch das Produkt

$$B_n(a, \omega) = \Gamma_n(\omega) B_n(c, \omega) \quad (2.134)$$

(Gleichung 2.131). Im Zeitbereich entspricht dies der Faltung

$$B_n(a, t) = \int_{-\infty}^{t^+} B_n(c, t') \gamma_n(t - t') dt', \quad (2.135)$$

wobei t^+ anzeigt, daß die Integration den Zeitpunkt t vollständig einschließt im Sinne von

$$\int_{t_a}^{t^+} f(t') dt' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_a}^{t+\varepsilon} f(t') dt', \quad (2.136)$$

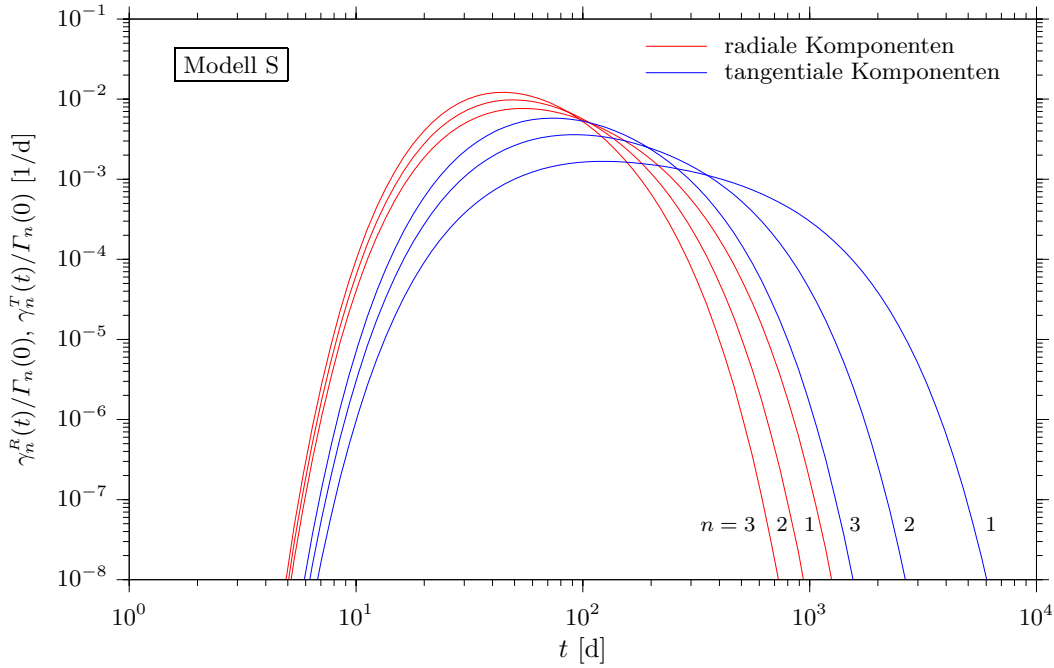


Abbildung 2.11: Mit $1/\Gamma_n(0)$ normierte Faltungskerne $\gamma_n^R(t)$ und $\gamma_n^T(t)$ der Grade $n = 1, \dots, 3$ für Modell S

und der Faltungskern

$$\gamma_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_n(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.137)$$

die Fourier-Transformierte der Übertragungsfunktion ist und Impulsantwortfunktion genannt wird. Diese Bezeichnung wird im nächsten Abschnitt erklärt. Abbildung 2.11 zeigt die Faltungskerne der radialen und tangentialen Komponenten für Modell S für die Grade bis $n = 3$. Als Integrationsgrenze wird in Gleichungen (2.135) aufgrund der Kausalität t^+ verwendet, denn das gegenwärtige Feld an der Erdoberfläche kann nur abhängen vom früheren und jetzigen Feld an der Kern-Mantel-Grenze. Entsprechend gilt

$$\Gamma_n(\omega) = \int_0^{\infty} \gamma_n(t) e^{i\omega t} dt, \quad (2.138)$$

und damit folgt speziell für $\omega = 0$ mit Gleichung (2.129)

$$\int_0^{\infty} \gamma_n(t) dt = \Gamma_n(0) = \left(\frac{c}{a}\right)^{n+2}. \quad (2.139)$$

Im Prinzip kann man umgekehrt aus dem zeitlichen Verlauf an der Erdoberfläche auf den zeitlichen Verlauf auf der Kern-Mantel-Grenze schließen, siehe z. B. Benton und Whaler (1983), Ballani et al. (2002).

Von der Möglichkeit, den zeitlichen Verlauf von $B_n(a, t)$ an der Erdoberfläche für ein vorgegebenes Signal $B_n(c, t)$ an der Kern-Mantel-Grenze zu bestimmen, wird in verschiedenen

Zusammenhängen Gebrauch gemacht. In Abschnitt 3.1 bzw. 3.5 wird als Anregung eine Gauß-Funktion gewählt, und in Abschnitt 4.4 wird der Verlauf an der Erdoberfläche für einen Fall gezeigt, in dem als Anregung die Realisierung eines stationären Gauß-Prozesses verwendet wird (siehe Abbildung 4.6 auf Seite 106). Zum Abschluß dieses Kapitels soll im folgenden ein δ -Impuls an der Kern-Mantel-Grenze behandelt werden.

2.11 δ -Impuls

Als Beispiel für eine instantane Änderung der magnetischen Flußdichte an der Kern-Mantel-Grenze wird ein δ -Impuls betrachtet, für den $B_n(c, t) = B_0 \Delta t \delta(t)$ gelte. Der Faktor Δt wird eingeführt, damit B_0 die Einheit des magnetischen Flusses hat, denn $\delta(t)$ hat die Dimension einer reziproken Zeit. Setzt man $B_n(c, t)$ in Gleichung (2.135) ein, dann erhält man an der Erdoberfläche als Antwort auf die Anregung mit dem Impuls an der Kern-Mantel-Grenze

$$B_n(a, t) = B_0 \Delta t \gamma_n(t). \quad (2.140)$$

Bis auf einen Faktor erhält man die Fourier-Transformierte der Übertragungsfunktion. Daher stammt die Bezeichnung Impulsantwortfunktion. Die normierten Impulsantwortfunktionen $\gamma_n(t)/\Gamma_n(0)$ des Modells S in Abbildung 2.11 zeigen, daß der Verlauf an der Erdoberfläche gegenüber der Vorgabe an der Kern-Mantel-Grenze verzögert und geglättet ist und daß bezogen auf den gleichen Grad n der Einfluß des Mantels auf die tangential Komponente stärker ist als auf die radiale. Im folgenden konzentriert sich die Diskussion auf die radiale Komponente, denn in der Regel wird sie wegen ihrer Sonderstellung an der Kern-Mantel-Grenze vorgegeben. Eine genaue Betrachtung des Zusammenhangs zwischen radialer und tangentialer Komponente erfolgt in Abschnitt 3.5.

Verzögerung und Glättung gehen mit wachsendem Grad n zurück. Abbildung 2.12 vergleicht die radialen Impulsantwortfunktionen der Modelle S und SD für die Grade $n = 1, \dots, 5$. Dargestellt ist wieder $\gamma_n^R(t)/\Gamma_n(0)$, so daß die geometrische Abschwächung nicht in Erscheinung tritt, sondern nur die elektromagnetische Dämpfung. Die Wirkung des Modells SD ist etwa um den Faktor 10 stärker als die des Modells S; das gilt sowohl hinsichtlich der Verzögerung als auch der Glättung, wie der Vergleich der Abbildungen 2.13a und 2.13b deutlich zeigt. In der linearen Darstellung der Abbildung 2.13 sind die Flächen unter den Kurven $\gamma_n^R(t)/\Gamma_n(0)$ nach Gleichung (2.139) jeweils gleich 1. Sie verdeutlicht auch den großen Unterschied zwischen dem raschen Anstieg und der langsamen Abnahme.

Der Zeitpunkt τ_{\max} , an dem die Impulsantwortfunktion ihr Maximum erreicht, nimmt zusammen mit der Kurvenbreite mit wachsendem Grad n ab, vgl. Tabelle 2.1. Diese Maximumszeit τ_{\max} gibt eine erste Vorstellung dafür, wie lange ein Signal von der Kern-Mantel-Grenze bis zur Erdoberfläche benötigt. Die Werte von τ_{\max} für die Grade bis $n = 10$ liegen für Modell S bei etwa 26 d bis 54 d Tagen, für Modell SD bei 0.8 a bis 1.2 a. Selbst Modell SD, dessen elektrische Leitfähigkeit im oberen Bereich angesiedelt ist, sollte nach diesen Ergebnissen noch mit Jerks verträglich sein. Tatsächlich paßt die zeitliche Verzögerung von etwa 1 a zu den Beobachtungen von Holme und de Viron (2005). Die elektrische Leitfähigkeit im unteren Mantel kann zumindest nicht erheblich höher sein,

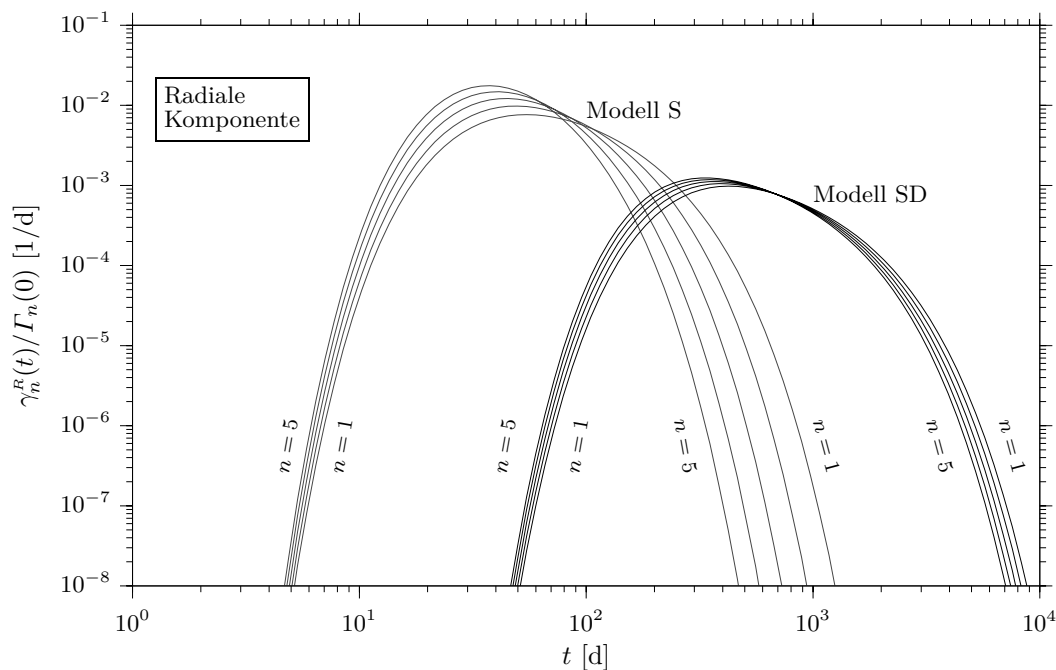
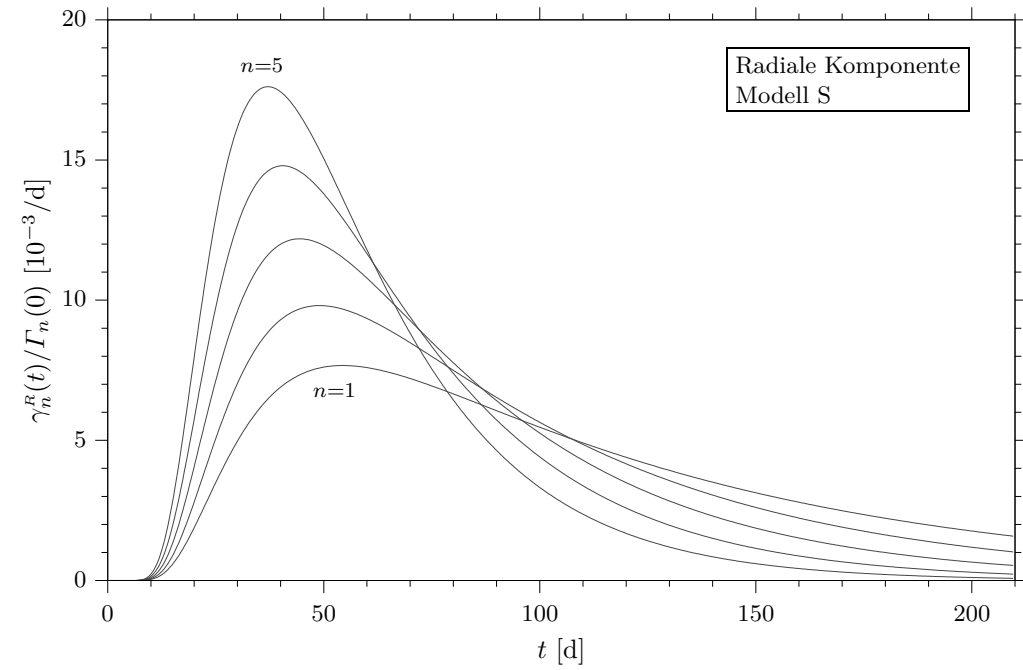


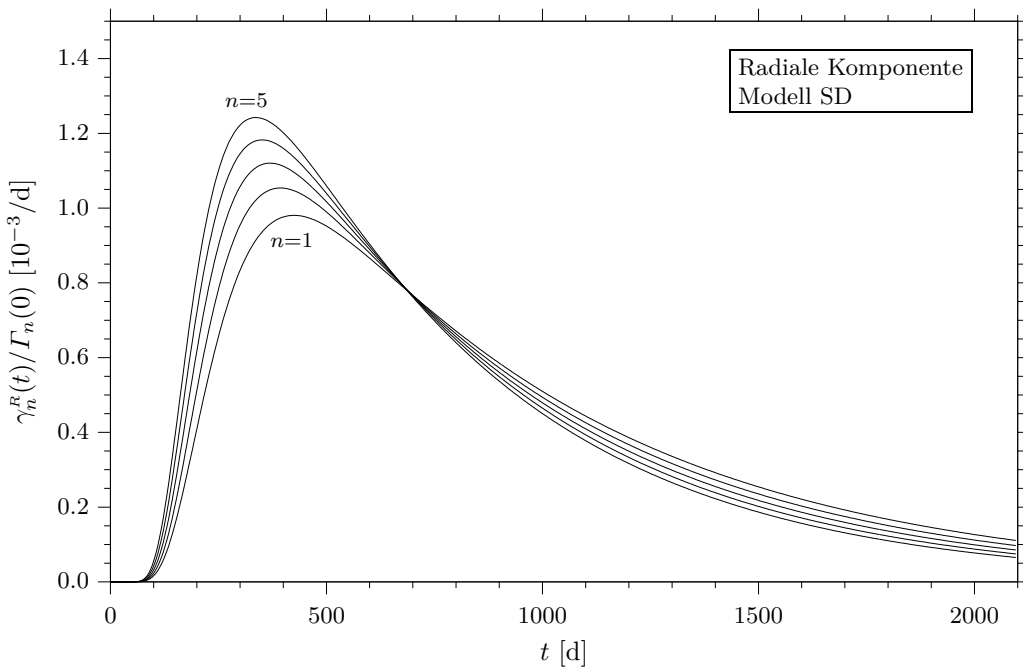
Abbildung 2.12: Mit $1/\Gamma_n(0)$ normierte Impulsantwortfunktionen γ_n^R der radialen Komponenten der Grade $n = 1, \dots, 5$ für die Modelle S und SD

n	$\tau_{\max}^R(n)$ [d]	
	Modell S	Modell SD
1	54.4	425
2	49.0	393
3	44.4	370
4	40.5	351
5	37.1	336
6	34.2	324
7	31.7	314
8	29.5	306
9	27.5	298
10	25.8	291

Tabelle 2.1: Zum Zeitpunkt $\tau_{\max}^R(n)$ nimmt die Impulsantwortfunktion $\gamma_n^R(t)$ ihr Maximum an. Die Tabelle enthält die Werte für die Modelle S und SD.



(a) Modell S



(b) Modell SD

Abbildung 2.13: Dargestellt sind die Impulsantwortfunktionen der radialen Komponente der Grade $n = 1, \dots, 5$ für Modell S (oben) und Modell SD (unten). Die Flächen unter den mit $1/\Gamma_n(0)$ normierten Impulsantwortfunktionen sind alle gleich 1.

als im Modell SD angenommen. Der Frage nach einem Maß für die Verzögerung bzw. Glättung soll im nächsten Kapitel im Detail nachgegangen werden.

Kapitel 3

Zeitkonstanten des Mantels

Die Behandlung der Diffusion durch den geschichteten Mantel im vorangegangenen Kapitel ermöglicht es, für einen vorgegebenen zeitlichen Verlauf des Magnetfeldes an der Kern-Mantel-Grenze den exakten Verlauf an der Erdoberfläche zu bestimmen. Für die Einschätzung und den Vergleich von Mantelmodellen ist es zweckmäßig, über ein Maß zu verfügen, das (näherungsweise) angibt wie lange ein Signal benötigt, um den Mantel nach oben zu durchqueren, und wie stark es auf seinem Weg geglättet wird. In diesem Kapitel werden solche Maße, nämlich die Zeitkonstanten, eingeführt.

Eine Antwort auf die Frage, wie lange ein Signal vom Kern an die Oberfläche braucht, hat beispielsweise schon McDonald (1957) zu geben versucht, der die benötigte Zeit mit $0.8 \text{ a} \pm 0.4 \text{ a}$ angibt. In einer sehr detaillierten Analyse versucht er, die Dauer aus der Phasenverzögerung abzuschätzen, die allerdings frequenzabhängig ist, vgl. Abbildung 2.9, so daß seine Abschätzung nur für Signale gültig ist, die auf einen engen Frequenzbereich beschränkt sind, siehe auch Abschnitt 1.3.2. Eine Alternative sind die Maximumszeiten aus Tabelle 2.1, also die Zeit zwischen einem δ -Impuls an der Kern-Mantel-Grenze und dem Erreichen des Maximums an der Erdoberfläche.

Backus (1983) führt Zeitkonstanten für die radiale Komponente des poloidalen Feldes ein, nämlich die Diffusionszeit (*diffusion time*) $\tau_d^R(n)$ und die Glättungszeit (*smoothing time*) $\tau_s^R(n)$, die systematisch die Dauer bzw. das Auseinanderlaufen beschreiben. Die Zeitkonstanten basieren auf Eigenschaften der Impulsantwortfunktion $\gamma_n^R(t)$. Ansätze zu diesen Zeitkonstanten finden sich teilweise bereits bei Smylie (1965). Backus (1983) wendet die Filtertheorie auf den Jerk von 1969 an und behandelt den Mantel als kausalen, zeitinvarianten, reellen und linearen (Tiefpaß-)Filter. Seine Vorgehensweise wird in diesem Kapitel aufgegriffen und zum einen auf die tangentialen Komponente, die in der Literatur kaum Beachtung findet, erweitert und zum anderen konkret auf Schichtmodelle angewendet. Das Ziel ist es, die Zeitkonstanten $\tau_d^{R,T}(n)$ und $\tau_s^{R,T}(n)$ auf elementare Weise aus der Leitfähigkeitsverteilung eines gegebenen Schichtmodells zu berechnen.

Die Zeitkonstanten ermöglichen eine Abschätzung, auf welchen Zeitskalen sich ein gegebenes Mantelmodell überhaupt auswirkt, und gestatten den einfachen Vergleich verschiedener Modelle. Allerdings können sie die Filtereigenschaften des Mantels nur grob beschreiben, weil sie zum einen aus einer Näherung für kleine Frequenzen ω hervorgehen und zum anderen für eine exakte Beschreibung unendlich viele Zeitkonstanten benötigt werden, hier aber nur die zwei wichtigsten betrachtet werden.

3.1 Einführung der Zeitkonstanten

Die von Backus (1983) eingeführten Zeitkonstanten werden aus den gewöhnlichen bzw. zentralen Momenten der Impulsantwortfunktion gewonnen, vgl. Gleichung (2.137) sowie Abschnitt 2.11. Backus (1983) verwendet das erste gewöhnliche und das zweite zentrale Moment, dabei handelt es sich um die sogenannte Diffusions- bzw. Glättungszeit, mit denen sich eine grobe Näherung für die Übertragungsfunktion bzw. die Impulsantwortfunktion angeben läßt, die nach den Gleichungen (2.137) und (2.138) ein Fourier-Transformationspaar bilden. Dieser Abschnitt folgt seinem Vorgehen, wobei die Herleitung der Zeitkonstanten zunächst gleichermaßen für die radiale wie auch die tangential Komponente gültig ist.

Die Übertragungsfunktion $\Gamma_n(\omega)$ läßt sich einerseits nach Gleichung (2.138) durch Fourier-Transformation der Impulsantwortfunktion $\gamma_n(t)$ berechnen, so daß man mit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion die Darstellung

$$\begin{aligned}\Gamma_n(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_n(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_n(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-i\omega t)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} t^k \gamma_n(t) dt\end{aligned}\tag{3.1}$$

erhält. Andererseits kann $\Gamma_n(\omega)$ für kleine ω in einer Umgebung von $\omega = 0$ in die Potenzreihe

$$\Gamma_n(\omega) = \Gamma_n(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^k}{k!} \nu_k^k(n)\tag{3.2}$$

entwickelt werden, wobei $\Gamma_n(0) = (c/a)^{n+2}$, vgl. Gleichung (2.139), die geometrische Abschwächung ist. Diese Entwicklung gilt nur in einer Umgebung von $\omega = 0$, in der $\Gamma_n(\omega)$ analytisch ist ($\Gamma_n(\omega)$ besitzt unendlich viele Polstellen auf der positiven imaginären Achse). Der Koeffizientenvergleich mit Gleichung (3.1) führt auf

$$\Gamma_n(0) \nu_k^k(n) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \gamma_n(t) dt.\tag{3.3}$$

Die $\nu_k^k(n)$ sind die k -ten gewöhnlichen Momente der Impulsantwortfunktion $\gamma_n(t)$. Analog gilt für die zentralen Momente $\mu_k^k(n)$

$$\begin{aligned}\Gamma_n(0) \mu_k^k(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} [t - \nu_1(n)]^k \gamma_n(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (t')^k \gamma_n(t' + \nu_1(n)) dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t^k \hat{\gamma}_n(t) dt.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$\hat{\gamma}_n(t) := \gamma_n(t + \nu_1(n)) \quad (3.5)$$

gesetzt worden. Die zentralen Momente von $\gamma_n(t)$ sind die gewöhnlichen Momente von $\hat{\gamma}_n(t)$. Aufgrund der Definition der zentralen Momente gilt für das erste zentrale Moment $\mu_1(n) = 0$. Das zweite zentrale Moment $\mu_2^2(n)$ läßt sich aus dem ersten und zweiten gewöhnlichen Moment berechnen, es gilt

$$\begin{aligned} \Gamma_n(0) \mu_2^2(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} [t - \nu_1(n)]^2 \gamma_n(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [t^2 - 2t\nu_1(n) + \nu_1^2(n)] \gamma_n(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \gamma_n(t) dt - 2\nu_1(n) \int_{-\infty}^{\infty} t \gamma_n(t) dt + \nu_1^2(n) \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_n(t) dt \\ &= \Gamma_n(0) [\nu_2^2(n) - \nu_1^2(n)], \end{aligned} \quad (3.6)$$

also

$$\mu_2^2(n) = \nu_2^2(n) - \nu_1^2(n). \quad (3.7)$$

Die Fourier-Transformierte von $\hat{\gamma}_n(t)$, Gleichung (3.5), folgt aus dem Verschiebungssatz

$$\hat{\Gamma}_n(\omega) = \Gamma_n(\omega) \exp[i\omega\nu_1(n)]. \quad (3.8)$$

Insbesondere ist $\hat{\Gamma}_n(0) = \Gamma_n(0) = (c/a)^{n+2}$. Analog zu Gleichung (3.2) läßt sich $\hat{\Gamma}_n(\omega)$ mit den zentralen Momenten an Stelle der gewöhnlichen Momente in die Reihe

$$\hat{\Gamma}_n(\omega) = \Gamma_n(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^k}{k!} \mu_k^k(n) \quad (3.9)$$

entwickeln.

Aus der ℓ -ten Ableitung von $\hat{\Gamma}_n(\omega)$ nach $(-i\omega)$

$$\frac{d^\ell}{d(-i\omega)^\ell} \hat{\Gamma}_n(\omega) = \Gamma_n(0) \sum_{k=\ell}^{\infty} \mu_k^\ell(n) \frac{[-i\omega\mu_k(n)]^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \quad (3.10)$$

folgt speziell für $\omega = 0$

$$\frac{d^\ell}{d\omega^\ell} \hat{\Gamma}_n(\omega) \Big|_{\omega=0} = (-i)^\ell \Gamma_n(0) \mu_\ell^\ell(n). \quad (3.11)$$

Zur Bestimmung von $\hat{\Gamma}_n(\omega)$ werden die Hilfsfunktionen $f(\omega)$ und $g(\omega)$ eingeführt, mit:

$$f(\omega) = \ln g(\omega) \quad \text{und} \quad g(\omega) = \frac{\hat{\Gamma}_n(\omega)}{\Gamma_n(0)}. \quad (3.12)$$

Die Ableitungen von $f(\omega)$ nach ω lassen sich ausdrücken durch die Ableitungen von $g(\omega)$. Es gilt

$$f' = \frac{g'}{g}, \quad f'' = \frac{gg'' - (g')^2}{g^2}, \quad f''' = \frac{-3gg'g'' + g^2g''' + 2(g')^3}{g^3}. \quad (3.13)$$

Aus Gleichung (3.11) folgt für die ℓ -te Ableitung von $g(\omega)$ an der Stelle $\omega = 0$

$$\left. \frac{d^\ell}{d\omega^\ell} g(\omega) \right|_{\omega=0} = (-i)^\ell \mu_\ell^\ell(n). \quad (3.14)$$

Speziell für $0 \leq \ell \leq 3$ gilt

$$\begin{aligned} g(0) &= 1, & g'(0) &= -i\mu_1(n) = 0, \\ g''(0) &= (-i)^2 \mu_2^2(n), & g'''(0) &= (-i)^3 \mu_3^3(n). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Einsetzen dieser Ergebnisse in die Taylor-Entwicklung von $f(\omega)$ um $\omega = 0$

$$f(\omega) = f(0) + f'(0)\omega + \frac{1}{2!} f''(0)\omega^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)\omega^3 + \dots \quad (3.16)$$

führt auf

$$f(\omega) = \frac{(-i\omega)^2}{2!} \mu_2^2(n) + \frac{(-i\omega)^3}{3!} \mu_3^3(n) + \dots \quad (3.17)$$

Damit erhält man für $\hat{\Gamma}_n(\omega)$ aus Gleichung (3.12)

$$\hat{\Gamma}_n(\omega) = \Gamma_n(0) \exp \left[\frac{1}{2} \mu_2^2(n) (-i\omega)^2 + \frac{1}{6} \mu_3^3(n) (-i\omega)^3 + \dots \right], \quad (3.18)$$

und für $\Gamma_n(\omega)$ folgt mit Gleichung (3.8)

$$\Gamma_n(\omega) = \Gamma_n(0) \cdot \exp \left[\nu_1(n) (-i\omega) + \frac{1}{2} \mu_2^2(n) (-i\omega)^2 + \frac{1}{6} \mu_3^3(n) (-i\omega)^3 + \dots \right]. \quad (3.19)$$

Die weiteren Terme lassen sich nicht so leicht bilden, wie es Gleichung (3.19) nahelegt (siehe Backus, 1983). Definiert man die

$$\text{Diffusionszeit } \tau_d(n) := \nu_1(n) \text{ und die} \quad (3.20)$$

$$\text{Glättungszeit } \tau_s(n) := \mu_2(n), \quad (3.21)$$

dann erhält man für $\Gamma_n(\omega)$ die Backussche Näherung

$$\Gamma_n(\omega) = \Gamma_n(0) \exp \left[-i\tau_d(n)\omega - \frac{1}{2} \tau_s^2(n)\omega^2 \right], \quad (3.22)$$

wenn man höhere Terme im Exponenten vernachlässigt. Die Näherung für die Impulsantwortfunktion ist gegeben durch

$$\gamma_n(t) = \frac{\Gamma_n(0)}{\sqrt{2\pi} \tau_s(n)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{t - \tau_d(n)}{\tau_s(n)} \right]^2 \right\}. \quad (3.23)$$

Dabei handelt es sich um eine Gauß-Funktion, die um $\tau_d(n)$ verschoben ist und deren Breite durch $\tau_s(n)$ bestimmt wird. Zunächst erscheint diese Näherung problematisch, weil die Gauß-Funktion symmetrisch bezüglich $t = \tau_d(n)$ ist und für $t < 0$ nicht verschwindet, wohingegen die Impulsantwortfunktion asymmetrisch ist, und wegen der Kausalität $\gamma_n(t) = 0$ für $t < 0$ gilt. Dieser Unterschied ist jedoch unbedeutend, solange $\tau_d(n)$ und $\tau_s(n)$ verglichen mit der Zeitskala der Magnetfeldänderungen klein sind.

Die Faltung einer Magnetfeldanregung mit $\gamma_n(t)$ aus Gleichung (3.23) führt zu einer Verschiebung um $\tau_d(n)$ und einer Verbreiterung, die durch $\tau_s(n)$ gegeben ist. Für $\tau_s(n) \rightarrow 0$ ist $\gamma_n(t) = \Gamma_n(0)\delta(t-\tau_d(n))$. In diesem Fall ist das Signal an der Erdoberfläche lediglich um $\tau_d(n)$ gegenüber dem an der Kern-Mantel-Grenze verschoben, ansonsten aber unverändert. Diese Verzögerung kann man als die Zeit interpretieren, die ein Signal benötigt, um durch den Mantel zu diffundieren; aus diesem Grund trägt $\tau_d(n)$ den Namen Diffusionszeit. Für $\tau_s(n) > 0$ führt die Faltung mit der Näherung zu einer Glättung des ursprünglichen Signals, die von $\tau_s(n)$ abhängt. Daher die Bezeichnung Glättungszeit für $\tau_s(n)$.

Die Zeitkonstanten $\tau_d(n)$ und $\tau_s(n)$ können durch Ableitungen der Übertragungsfunktion $\Gamma_n(\omega)$ ausgedrückt werden. Die erste und zweite Ableitung der Gleichung (3.22) führt auf

$$\Gamma_n'(\omega) = \Gamma_n(0)[-i\tau_d(n) - \tau_s^2(n)\omega] \exp[-i\tau_d(n)\omega - \frac{1}{2}\tau_s^2(n)\omega^2], \quad (3.24)$$

$$\Gamma_n''(\omega) = \Gamma_n(0) \left\{ [-i\tau_d(n) - \tau_s^2(n)\omega]^2 - \tau_s^2(n) \right\} \exp[-i\tau_d(n)\omega - \frac{1}{2}\tau_s^2(n)\omega^2]. \quad (3.25)$$

Setzt man $\omega = 0$, dann erhält man

$$\tau_d(n) = i\Gamma_n'(0)/\Gamma_n(0), \quad (3.26)$$

$$\tau_s^2(n) = [\Gamma_n'(0)/\Gamma_n(0)]^2 - \Gamma_n''(0)/\Gamma_n(0). \quad (3.27)$$

Als Beispiel soll der einfache Fall betrachtet werden, daß der zeitliche Verlauf der radialen Komponente an der Kern-Mantel-Grenze durch eine Gauß-Funktion vorgegeben wird, also

$$B_n(c, \omega) = B_0 \Delta t \exp\left(-\frac{\sigma_c^2 \omega^2}{2}\right) \quad (3.28)$$

$$B_n(c, t) = B_0 \Delta t \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_c} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_c^2}\right) \quad (3.29)$$

gilt, wobei σ_c die Breite der Gauß-Funktion bestimmt und im Rahmen dieses Modells als eine Zeitkonstante der Feldänderung an der Kern-Mantel-Grenze interpretiert werden kann. Dieser Ansatz enthält als Grenzfall für $\sigma_c \rightarrow 0$ auch den δ -Impuls an der Kern-Mantel-Grenze. Der Verlauf an der Erdoberfläche kann mit Hilfe der Backusschen Näherung direkt angeben, denn mit den Näherungen für $\Gamma_n(\omega)$ und $\gamma_n(t)$ lassen sich $B_n(a, \omega)$ bzw. $B_n(a, t)$ mit Hilfe der Gleichung (2.134) bzw. (2.135) bestimmen. Man erhält

$$B_n(a, \omega) = \left(\frac{c}{a}\right)^{n+2} B_0 \Delta t \exp\left\{-i\tau_d(n)\omega - \frac{\sigma_c^2 + \tau_s^2(n)}{2}\omega^2\right\} \quad (3.30)$$

$$B_n(a, t) = \left(\frac{c}{a}\right)^{n+2} B_0 \Delta t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_c^2 + \tau_s^2(n)}} \exp\left\{-\frac{[t - \tau_d(n)]^2}{2[\sigma_c^2 + \tau_s^2(n)]}\right\}. \quad (3.31)$$

Beim nichtleitenden Mantel beobachtet man an der Erdoberfläche direkt die geometrisch abgeschwächte Anregung, weil die Übertragungsfunktion in diesem Fall aus Gleichung (2.128), nämlich $\Gamma_n(\omega) = (c/a)^{n+2}$, folgt. In diesem Fall erhält man

$$B_n(a, t) = \left(\frac{c}{a}\right)^{n+2} B_0 \Delta t \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_c} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_c^2}\right). \quad (3.32)$$

Abbildung 3.1 zeigt die Ergebnisse für den nichtleitenden Mantel und Modell S für unterschiedliche Werte von σ_c und $n = 1$, wobei man für $\sigma_c \rightarrow 0$ einen δ -Impuls an der Kern-Mantel-Grenze als Anregung erhält. Die Abbildung vergleicht die Näherung zum einen mit dem wirklichen Verlauf, wie er mit $\gamma_n(t)$ aus Gleichung (2.135) folgt, und zum anderen mit dem Verlauf beim nichtleitenden Mantel. Bei letzterem entspricht der Verlauf an der Erdoberfläche dem mit der geometrischen Abschwächung skalierten Verlauf an der Kern-Mantel-Grenze. Im Fall der Abbildung 3.1a weichen exakter und angenäherter Verlauf stark voneinander ab, weil die Näherung nur für kleine Frequenzen ω gültig ist, beim δ -Impuls jedoch alle Frequenzen gleichermaßen vertreten sind. Bereits in Abbildung 3.1b beschreibt die Näherung den tatsächlichen Verlauf wesentlich besser. Je größer σ_c im Vergleich zu τ_s wird, desto besser wird die Näherung. Gleichzeitig ähneln beide immer mehr dem Verlauf für den nichtleitenden Mantel. Tendenziell werden zeitliche Verzögerung und Glättung durch die Näherung überschätzt.

Bisher ergeben sich noch keine Unterschiede zwischen der radialen und der tangentialen Komponente. Das wird sich im nächsten Abschnitt bei der konkreten Berechnung der Zeitkonstanten τ_d und τ_s aus der Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(r)$ ändern.

3.2 Bestimmung der Zeitkonstanten

Im vorangegangenen Abschnitt wurden die Zeitkonstanten $\tau_d(n)$ und $\tau_s(n)$ durch die Übertragungsfunktionen und ihre Ableitungen an der Stelle $\omega = 0$ ausgedrückt, vgl. Gleichung (3.26) und (3.27). Wünschenswert ist es, $\tau_d(n)$ und $\tau_s(n)$ unmittelbar aus der Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(r)$ zu berechnen. Das ist das Ziel, das dieser Abschnitt verfolgt, wobei sich im folgenden wichtige Unterschiede zwischen der radialen und der tangentialen Komponente ergeben.

Die radialen und tangentialen Übertragungsfunktionen sind definiert als das Verhältnis der radialen bzw. tangentialen Magnetfeldkomponenten an der Erdoberfläche ($r = a$) zur selben Komponente an der Kern-Mantel-Grenze ($r = c$), siehe die Definitionen (2.125) und (2.126). Führt man

$$\Psi_n(r) = r f_n(r), \quad (3.33)$$

mit $f_n(r)$ aus Kapitel 2, Gleichung (2.59), ein, dann können die Übertragungsfunktionen geschrieben werden als

$$\Gamma_n^R(\omega) = \frac{B_{nr}(a, \omega)}{B_{nr}(c, \omega)} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \frac{\Psi_n(a)}{\Psi_n(c)}, \quad (3.34)$$

$$\Gamma_n^T(\omega) = \frac{B_{n\vartheta}(a, \omega)}{B_{n\vartheta}(c, \omega)} = \frac{B_{n\varphi}(a, \omega)}{B_{n\varphi}(c, \omega)} = \frac{c}{a} \frac{\Psi_n'(a)}{\Psi_n'(c)}, \quad (3.35)$$

und $\Psi_n(r)$ genügt der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dr^2} \Psi_n(r) = \left[\frac{n(n+1)}{r^2} + i\omega\mu_0\sigma(r) \right] \Psi_n(r), \quad (3.36)$$

was aus der Definition (3.33) und der Gleichung (2.70) folgt. Da $\Psi_n(r)$ im wesentlichen als Funktion von r behandelt wird, soll $\Psi_n'(r) = d\Psi_n/dr$ verwendet werden, obwohl $\Psi_n(r)$

auch von ω abhängt. In die Übertragungsfunktionen der radialen und der tangentialen Komponente gehen $\Psi_n(r)$ bzw. $\Psi'_n(r)$ ein. Diese werden im folgenden nach Potenzen von ω entwickelt. Mit Hilfe der Entwicklungen können dann die Zeitkonstanten angegeben werden. Aus formalen Gründen wird der gesamte Bereich $r \geq c$ einbezogen. Erst später wird nur der Mantel ($c \leq r \leq a$) berücksichtigt, indem $\sigma = 0$ für $r > a$ gesetzt wird.

Im folgenden unterscheiden sich die Ansätze für die radiale und die tangential Komponente. Deshalb werden bis zum Ende des Abschnitts die Indizes R und T konsequent mitgeführt. Da in die Gleichungen (3.34) und (3.35) nur die Quotienten der Felder eingehen, kann man eine zweckmäßige Normierung für $\Psi_n(r)$ wählen. Im Zusammenhang mit $\Gamma_n^R(\omega)$ wird $\Psi_n^R(r)$ mit $\Psi_n^R(c) = 1$ gewählt und bei $\Gamma_n^T(\omega)$ analog $\Psi_n^T(r)$ mit $\Psi_n^{T'}(c) = -n/c$. Für kleine Frequenzen ω wird der Störungsansatz

$$\Psi_n^{R,T}(r) = \Psi_{n0}^{R,T}(r) + \Psi_{n1}^{R,T}(r) + \Psi_{n2}^{R,T}(r) \quad (3.37)$$

gemacht, wobei $\Psi_{n\ell}^{R,T}(r) \sim \omega^\ell$ sein soll und $\Psi_{n0}^{R,T}$ die Lösung der ungestörten Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dr^2} \Psi_{n0}^{R,T}(r) = \frac{n(n+1)}{r^2} \Psi_{n0}^{R,T}(r) \quad (3.38)$$

ist, vgl. Gleichung (3.36), die in ihrer allgemeinen Form

$$\Psi_{n0}^{R,T}(r) = A^{R,T} \frac{1}{r^n} + B^{R,T} r^{n+1} \quad (3.39)$$

lautet. $\Psi_{n0}^{R,T}(r)$ hängt nicht von ω ab. Da die Lösung für $r \rightarrow \infty$ verschwinden muß, ist $B^R = B^T = 0$. Mit $A^R = A^T = c^n$ werden die Randbedingungen $\Psi_n^R(c) = 1$ und $\Psi_n^{T'}(c) = -n/c$ erfüllt. Die Lösung für $\Psi_{n0}^{R,T}(r)$ ist somit gegeben durch

$$\Psi_{n0}^R(r) = \left(\frac{c}{r}\right)^n \quad \text{und} \quad \Psi_{n0}^T(r) = \left(\frac{c}{r}\right)^n, \quad \Psi_{n0}^{T'}(r) = -\frac{n}{c} \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1}. \quad (3.40)$$

Insbesondere folgen aus $\Psi_n^R(c) = \Psi_{n0}^R(c)$ und $\Psi_n^{T'}(c) = \Psi_{n0}^{T'}(c)$ die Randbedingungen

$$\Psi_{n1}^R(c) = \Psi_{n2}^R(c) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Psi_{n1}^{T'}(c) = \Psi_{n2}^{T'}(c) = 0 \quad (3.41)$$

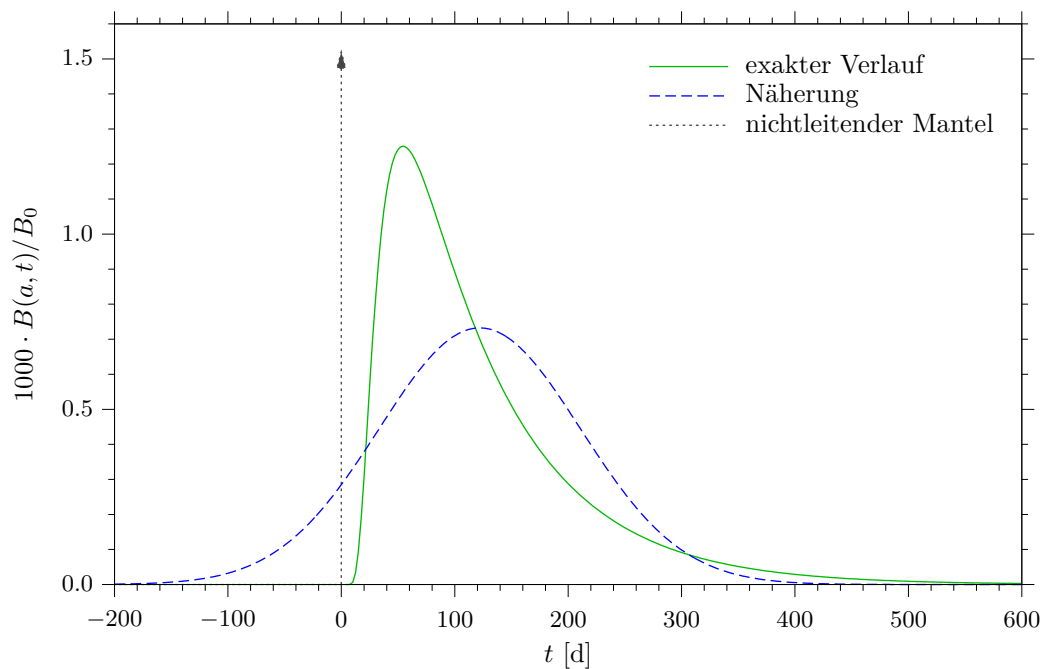
für die Störterme. Einsetzen des Ansatzes (3.37) in die Differentialgleichung (3.36) liefert

$$\Psi_{n0}^{R,T''} + \Psi_{n1}^{R,T''} + \Psi_{n2}^{R,T''} = \left[\frac{n(n+1)}{r^2} + i\omega\mu_0\sigma \right] [\Psi_{n0}^{R,T} + \Psi_{n1}^{R,T} + \Psi_{n2}^{R,T}]. \quad (3.42)$$

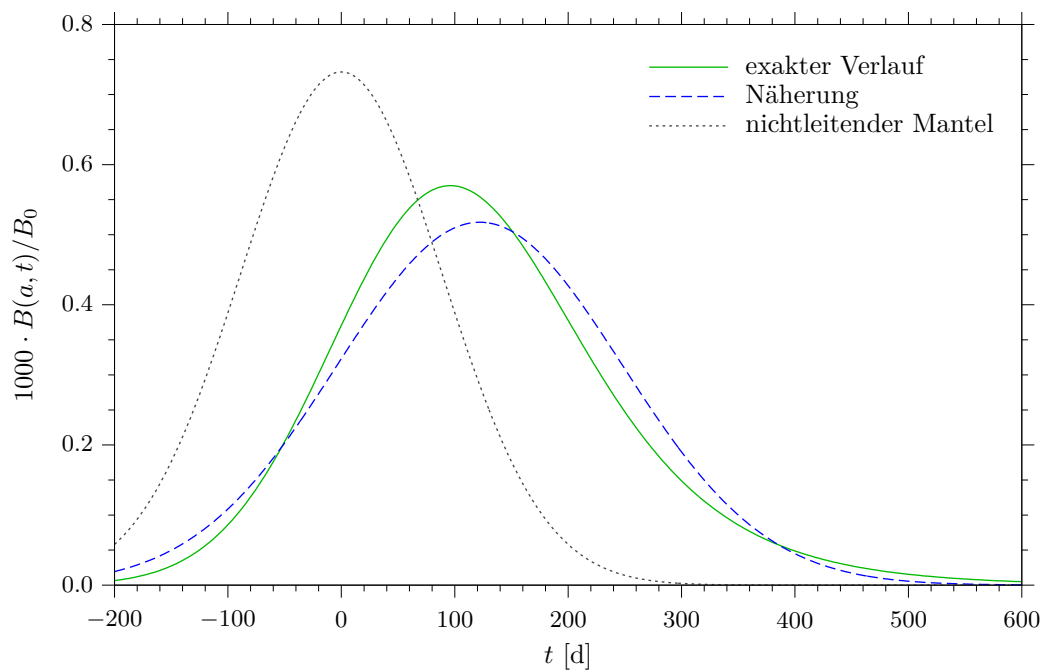
Vergleicht man Terme, die proportional zu ω und ω^2 sind, und berücksichtigt Gleichung (3.38), dann erhält man

$$\Psi_{n1}^{R,T''} = i\omega\mu_0\sigma \Psi_{n0}^{R,T} + \frac{n(n+1)}{r^2} \Psi_{n1}^{R,T}, \quad (3.43)$$

$$\Psi_{n2}^{R,T''} = i\omega\mu_0\sigma \Psi_{n1}^{R,T} + \frac{n(n+1)}{r^2} \Psi_{n2}^{R,T}. \quad (3.44)$$



(a) $\sigma_c \rightarrow 0$ (δ -Impuls)



(b) $\sigma_c = 0.5\tau_s$

Abbildung 3.1: Zeitlicher Verlauf der radialen Komponente mit $n = 1$ an der Erdoberfläche für Modell S (exakte Rechnung sowie Näherung) und den nichtleitenden Mantel bei Anregung in Form einer Gauß-Funktion mit dem Parameter σ_c an der Kern-Mantel-Grenze (vgl. Text)

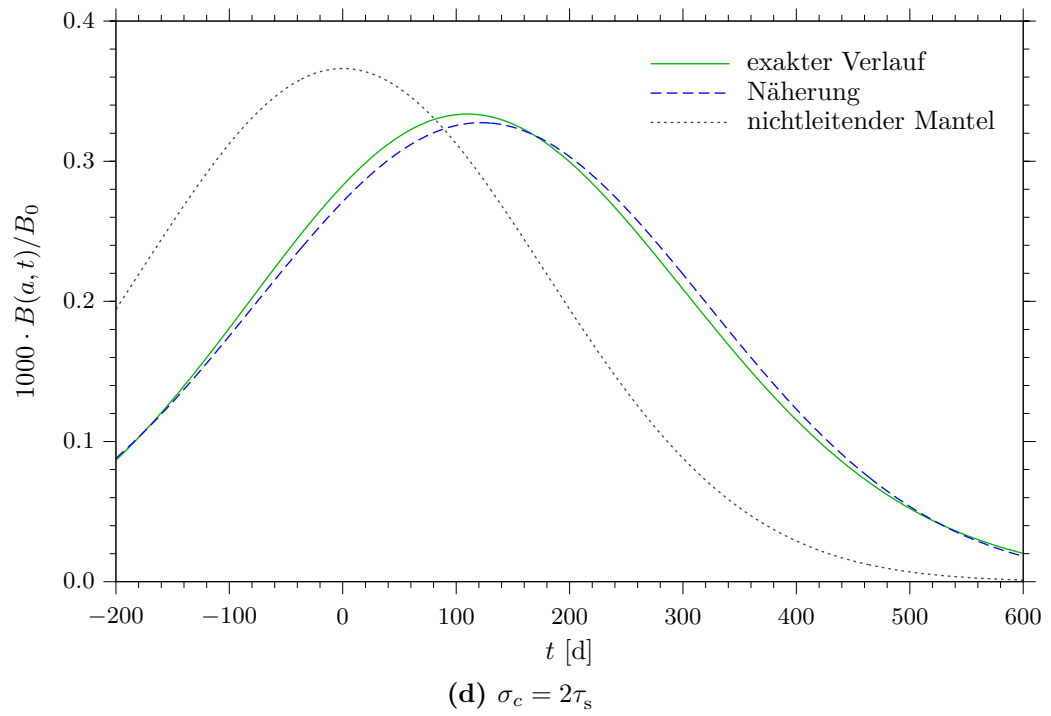
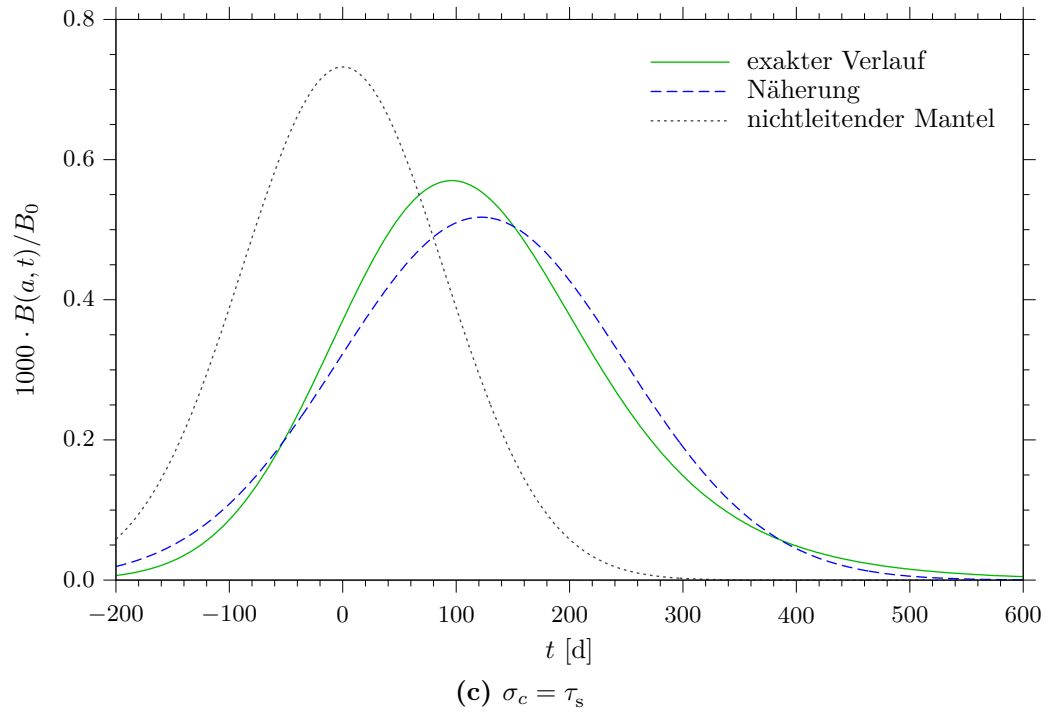


Abbildung 3.1: Zeitlicher Verlauf an der Erdoberfläche (Fortsetzung)

Die Differentialgleichungen (3.43) und (3.44) können auf die Integralgleichungen

$$\Psi_{n1}^{R,T}(r) = i\omega\mu_0 \int_c^\infty \sigma(x) \Psi_{n0}^{R,T}(x) G_n^{R,T}(r|x) dx, \quad (3.45)$$

$$\Psi_{n2}^{R,T}(r) = i\omega\mu_0 \int_c^\infty \sigma(x) \Psi_{n1}^{R,T}(x) G_n^{R,T}(r|x) dx \quad (3.46)$$

zurückgeführt werden (z. B. Courant und Hilbert, 1993), wobei die Greensche Funktion $G_n^{R,T}(r|r_0)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dr^2} G_n^{R,T}(r|r_0) - \frac{n(n+1)}{r^2} G_n^{R,T}(r|r_0) = \delta(r - r_0) \quad (3.47)$$

mit den Randbedingungen

$$G_n^R(c|r_0) = G_n^R(r \rightarrow \infty|r_0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad G_n^{T'}(c|r_0) = G_n^T(r \rightarrow \infty|r_0) = 0 \quad (3.48)$$

löst. Diese Randbedingungen werden benutzt, um im Ansatz für die Greensche Funktion

$$G_n^{R,T}(r|r_0) = \begin{cases} A^{R,T} \left(\frac{c}{r}\right)^n + B^{R,T} \left(\frac{r}{c}\right)^{n+1} & \text{für } c \leq r \leq r_0, \\ C^{R,T} \left(\frac{c}{r}\right)^n + D^{R,T} \left(\frac{r}{c}\right)^{n+1} & \text{für } r_0 \leq r \end{cases} \quad (3.49)$$

die Koeffizienten $A^{R,T}$, $B^{R,T}$, $C^{R,T}$ und $D^{R,T}$ zu bestimmen. Als Lösung erhält man

$$G_n^{R,T}(r|r_0) = \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^n g_n^{R,T}(r_{<}), \quad (3.50)$$

wobei zur Abkürzung $r_{<} := \min(r, r_0)$, $r_{>} := \max(r, r_0)$ und

$$g_n^R(r) = -\frac{c}{2n+1} \left[\frac{r}{c} - \left(\frac{c}{r}\right)^{2n} \right], \quad g_n^T(r) = -\frac{c}{2n+1} \left[\frac{r}{c} + \frac{n+1}{n} \left(\frac{c}{r}\right)^{2n} \right] \quad (3.51)$$

benutzt wird. (Zu den Greenschen Funktionen in sphärischen Koordinaten siehe z. B. Jackson (1999).) Mit den Greenschen Funktionen $G_n^{R,T}(r|r_0)$ folgt weiter

$$\Psi_{n1}^{R,T}(r) = i\omega\mu_0 \int_c^a \sigma(x) \left(\frac{c}{x}\right)^n G_n^{R,T}(r|x) dx, \quad (3.52)$$

$$\Psi_{n2}^{R,T}(r) = (i\omega\mu_0)^2 \int_c^a \sigma(y) G_n^{R,T}(r|y) \int_c^a \sigma(x) \left(\frac{c}{x}\right)^n G_n^{R,T}(y|x) dx dy, \quad (3.53)$$

dabei wird a als obere Integrationsgrenze verwendet, weil $\sigma(r) = 0$ für $r > a$ gilt. Im nächsten Schritt werden für die Berechnung der Zeitkonstanten die Werte von $\Psi_{n1}^{R,T}(a)$ bzw. $\Psi_{n2}^{R,T}(a)$ und – für die tangentialen Komponenten – von $\Psi_{n1}^{T'}(a)$ bzw. $\Psi_{n2}^{T'}(a)$ benötigt.

Für die Ableitung der Greenschen Funktion $G_n^{R,T'}(r|r_0)$ an der Stelle $r = a$ folgt aus Gleichung (3.50) mit $r = a > r_0$

$$\left. \frac{d}{dr} G_n^{R,T}(r|r_0) \right|_{r=a} = -\frac{n}{a} \left(\frac{r_0}{a} \right)^n g_n^{R,T}(r_0) = -\frac{n}{a} G_n^{R,T}(a|r_0). \quad (3.54)$$

Unter Verwendung dieses Zwischenergebnisses erhält man aus den Gleichungen (3.52) und (3.53)

$$\Psi_{n1}^{R,T'}(a) = -(n/a) \Psi_{n1}^{R,T}(a) \quad \text{und} \quad \Psi_{n2}^{R,T'}(a) = -(n/a) \Psi_{n2}^{R,T}(a). \quad (3.55)$$

Es genügt daher, $\Psi_{n1}^{R,T}(a)$ bzw. $\Psi_{n2}^{R,T}(a)$ zu bestimmen. Es ist

$$\Psi_{n1}^{R,T}(a) = i\omega\mu_0 \left(\frac{c}{a} \right)^n \int_c^a \sigma(x) g_n^{R,T}(x) dx, \quad (3.56)$$

$$\Psi_{n2}^{R,T}(a) = (i\omega\mu_0)^2 (c/a)^n (I_{cy}^{R,T} + I_{ya}^{R,T}), \quad (3.57)$$

darin sind

$$\begin{aligned} I_{cy}^{R,T} &:= \left(\frac{a}{c} \right)^n \int_c^a \sigma(y) \left(\frac{y}{a} \right)^n g_n^{R,T}(y) \int_c^y \sigma(x) \left(\frac{c}{y} \right)^n g_n^{R,T}(x) dx dy \\ &= \int_c^a \sigma(y) g_n^{R,T}(y) \int_c^y \sigma(x) g_n^{R,T}(x) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_c^a \sigma(x) g_n^{R,T}(x) dx \right]^2, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} I_{ya}^{R,T} &:= \left(\frac{a}{c} \right)^n \int_c^a \sigma(y) \left(\frac{y}{a} \right)^n g_n^{R,T}(y) \int_y^a \sigma(x) \left(\frac{c}{x} \right)^n \left(\frac{y}{x} \right)^n g_n^{R,T}(y) dx dy \\ &= \int_c^a \sigma(y) [g_n^{R,T}(y)]^2 \int_y^a \sigma(x) \left(\frac{y}{x} \right)^{2n} dx dy. \end{aligned} \quad (3.59)$$

$I_{cy}^{R,T}$ und $I_{ya}^{R,T}$ entstehen, wenn man in $\Psi_{n2}^{R,T}(a)$ die Integration des inneren Integrals in die Intervalle (c, y) und (y, a) aufteilt. Bei der Umformung von $I_{cy}^{R,T}$ ist

$$\int_c^a f(y) \int_c^y f(x) dx dy = \left[\int_c^a f(y) dy \right]^2 \quad (3.60)$$

verwendet worden.

Aus Gleichung (3.34) und (3.35) folgt mit den Randbedingungen (3.41)

$$\Gamma_n^R(\omega) = \left(\frac{c}{a} \right)^2 \Psi_n^R(a; \omega), \quad (3.61)$$

$$\Gamma_n^T(\omega) = -\frac{c^2}{na} \Psi_n^{T'}(a; \omega). \quad (3.62)$$

Für die Berechnung der Zeitkonstanten nach Gleichung (3.26) und (3.27) werden die ersten Ableitungen von $\Gamma_n^{R,T}(\omega)$ an der Stelle $\omega = 0$ benötigt. Es ist

$$\left. \frac{d}{d\omega} \Gamma_n^R(\omega) \right|_{\omega=0} = \left(\frac{c}{a} \right)^2 \left. \frac{d}{d\omega} \Psi_n^R(a; \omega) \right|_{\omega=0} = \left(\frac{c}{a} \right)^2 \left. \frac{d}{d\omega} \Psi_{n1}^R(a; \omega) \right|_{\omega=0}, \quad (3.63)$$

$$\left. \frac{d}{d\omega} \Gamma_n^T(\omega) \right|_{\omega=0} = - \left(\frac{c^2}{na} \right) \left. \frac{d}{d\omega} \Psi_n^{T'}(a; \omega) \right|_{\omega=0} = \left(\frac{c}{a} \right)^2 \left. \frac{d}{d\omega} \Psi_{n1}^T(a; \omega) \right|_{\omega=0}, \quad (3.64)$$

$$\left. \frac{d^2}{d\omega^2} \Gamma_n^R(\omega) \right|_{\omega=0} = \left(\frac{c}{a} \right)^2 \left. \frac{d^2}{d\omega^2} \Psi_n^R(a; \omega) \right|_{\omega=0} = \left(\frac{c}{a} \right)^2 \left. \frac{d^2}{d\omega^2} \Psi_{n2}^R(a; \omega) \right|_{\omega=0}, \quad (3.65)$$

$$\left. \frac{d^2}{d\omega^2} \Gamma_n^T(\omega) \right|_{\omega=0} = - \left(\frac{c^2}{na} \right) \left. \frac{d^2}{d\omega^2} \Psi_n^{T'}(a; \omega) \right|_{\omega=0} = \left(\frac{c}{a} \right)^2 \left. \frac{d^2}{d\omega^2} \Psi_{n2}^T(a; \omega) \right|_{\omega=0}, \quad (3.66)$$

wobei für die tangentielle Komponente auf Gleichung (3.55) zurückgegriffen wurde. Aus den Gleichungen (3.56) und (3.57) folgt weiter

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\omega} \Gamma_n^{R,T}(\omega) \right|_{\omega=0} &= -i\mu_0 \left(\frac{c}{a} \right)^{n+2} \int_c^a \sigma(x) g_n^{R,T}(x) dx, \\ \left. \frac{d^2}{d\omega^2} \Gamma_n^{R,T}(\omega) \right|_{\omega=0} &= 2(i\mu_0)^2 \left(\frac{c}{a} \right)^{n+2} (I_{cy}^{R,T} + I_{ya}^{R,T}) \\ &= -\mu_0^2 \left(\frac{c}{a} \right)^{n+2} \left[\int_c^a \sigma(x) g_n^{R,T}(x) dx \right]^2 \\ &\quad - 2\mu_0^2 \left(\frac{c}{a} \right)^{n+2} \int_c^a \sigma(y) [g_n^{R,T}(y)]^2 \int_y^a \sigma(x) \left(\frac{y}{x} \right)^{2n} dx dy. \end{aligned}$$

Für die radialen und tangentialen Komponenten erhält man aus den Gleichungen (3.26) und (3.27) sowie $\Gamma_n^{R,T}(0) = (c/a)^{n+2}$ (Gleichung (2.139)) zusammengefaßt die folgenden Formeln:

$$\tau_d^R(n) = \frac{\mu_0 c}{2n+1} \int_c^a \sigma(r) \left[\frac{r}{c} - \left(\frac{c}{r} \right)^{2n} \right] dr, \quad (3.67)$$

$$\tau_d^T(n) = \frac{\mu_0 c}{2n+1} \int_c^a \sigma(r) \left[\frac{r}{c} + \frac{n+1}{n} \left(\frac{c}{r} \right)^{2n} \right] dr, \quad (3.68)$$

$$[\tau_s^R(n)]^2 = 2 \left(\frac{\mu_0 c}{2n+1} \right)^2 \int_c^a \sigma(r) \left[\frac{r}{c} - \left(\frac{c}{r} \right)^{2n} \right]^2 \int_r^a \sigma(x) \left(\frac{r}{x} \right)^{2n} dx dr, \quad (3.69)$$

$$[\tau_s^T(n)]^2 = 2 \left(\frac{\mu_0 c}{2n+1} \right)^2 \int_c^a \sigma(r) \left[\frac{r}{c} + \frac{n+1}{n} \left(\frac{c}{r} \right)^{2n} \right]^2 \int_r^a \sigma(x) \left(\frac{r}{x} \right)^{2n} dx dr. \quad (3.70)$$

Damit ist das eingangs formulierte Ziel erreicht, die Zeitkonstanten lassen sich direkt aus der Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(r)$ bestimmen.

Die Zeitkonstanten können durch die Integration über die gewichtete elektrische Leitfähigkeit $\sigma(r)$ berechnet werden. Es liegt nahe, Gewichtsfunktionen einzuführen, die unmittelbar den Einfluß der elektrischen Leitfähigkeit bei einem gegebenen Radius r auf die Diffusionszeit $\tau_d(n)$ angeben, vgl. Gleichung (3.67) und (3.68). Abbildung 3.2 zeigt für $n = 1, \dots, 5$ die Gewichtsfunktionen, die durch

$$w_n^R(\varrho) := \frac{1}{2n+1} (\varrho - \varrho^{-2n}) \quad \text{und} \quad w_n^T(\varrho) := \frac{1}{2n+1} \left(\varrho + \frac{n+1}{n} \varrho^{-2n} \right) \quad (3.71)$$

mit $\varrho := r/c$ definiert sind.

Die Gewichtsfunktionen der radialen und der tangentialen Komponente unterscheiden sich im unteren Mantel ganz erheblich. Am wesentlichsten ist der Unterschied an der Kern-Mantel-Grenze, denn für $\varrho = 1$ gilt für die radiale Komponente $w_n^R(1) = 0$, für die tangentiale $w_n^T(1) = 1/n$. Die Leitfähigkeit $\sigma(c)$ direkt an der Kern-Mantel-Grenze trägt weder zu $\tau_d^R(n)$ noch zu $\tau_s^R(n)$ bei. Für die Abschätzung der elektrischen Leitfähigkeit des untersten Bereichs des Mantels ist der Umstand, daß $\sigma(r)$ nur mit kleinem Gewicht in die Zeitkonstanten der radialen Komponente eingeht, sehr ungünstig. (Daß die Leitfähigkeit des unteren Mantels mit überdurchschnittlichem Gewicht in die Zeitkonstanten der tangentialen Komponente eingehen, hilft leider nicht, wie die Diskussion der Rolle der Komponenten in Abschnitt 3.5 zeigen wird.)

Die Unterschiede zwischen radialer und tangentialer Komponente sollen kurz an einem Mantel verdeutlicht werden, der nur eine dünne elektrisch leitende Schicht oberhalb der Kern-Mantel-Grenze besitzt. Es gelte $\sigma(r) = \sigma_D$ in $c \leq r \leq c(1 + \xi)$ und $\sigma(r) = 0$ für $r > c(1 + \xi)$, mit $0 < \xi \ll 1$. Aus den Gleichungen (3.67) bis (3.70) erhält man für die Zeitkonstanten die Näherungen

$$\tau_d^R(n) = \frac{\sigma_D \mu_0 c^2}{2} \xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3), \quad \tau_d^T(n) = \frac{\sigma_D \mu_0 c^2}{n} \xi + \mathcal{O}(\xi^2), \quad (3.72)$$

$$\tau_s^R(n) = \frac{\sigma_D \mu_0 c^2}{\sqrt{6}} \xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3), \quad \tau_s^T(n) = \frac{\sigma_D \mu_0 c^2}{n} \xi + \mathcal{O}(\xi^2). \quad (3.73)$$

Es soll in diesem Zusammenhang kurz auf den Einfluß des Leitwertes S auf die Zeitkonstanten eingegangen werden, weil bei Diskussionen über den Einfluß einer gut leitenden Schicht an der Kern-Mantel-Grenze häufig mit ihm argumentiert wird. Vergleicht man also Schichten mit konstantem Leitwert $S = \sigma_D c \xi = \text{const.}$, dann ergeben sich einige bemerkenswerte Konsequenzen. Die Zeitkonstanten der tangentialen Komponente sind nahezu unabhängig von der Dicke ξc , für sie ist $\tau_d^T \sim S$ und $\tau_s^T \sim S$, während die der radialen Komponente in erster Näherung proportional zu ξ sind, $\tau_d^R \sim S \xi$ und $\tau_s^R \sim S \xi$. Insbesondere gilt $\tau_d^R = \tau_s^R = 0$ für $\xi \rightarrow 0$. Zugleich hängen τ_d^R und τ_s^R nicht vom Grad n ab, und man erhält das Verhältnis $\tau_s^R(n)/\tau_d^R(n) = \sqrt{2/3}$. Während es bei konstantem Leitwert S für die Zeitkonstanten der tangentialen Komponente nur auf den Leitwert S ankommt, spielt bei der radialen Komponente zusätzlich die Dicke ξc eine wichtige Rolle, ein Umstand, den man unbedingt beachten muß, insbesondere wenn man ausgedehnte Schichten zur Vereinfachung durch dünne Schichten ersetzen möchte.

Die Integrale in den Gleichungen (3.67) bis (3.70) für die Zeitkonstanten können für Schichtmodelle in Summen umgewandelt werden (Abschnitt 3.4). Zunächst soll jedoch im

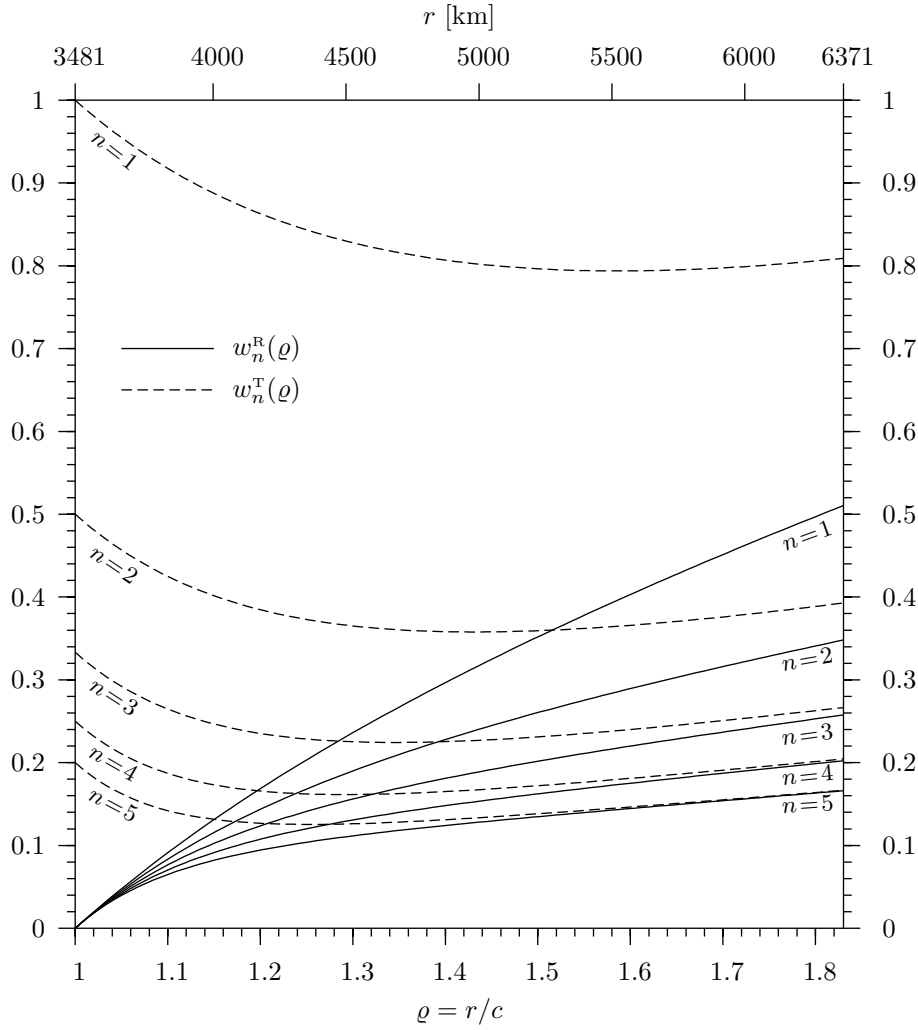


Abbildung 3.2: Gewichtsfunktionen $w_n^R(\varrho)$ für die radiale und $w_n^T(\varrho)$ für die tangentielle Komponente für die Grade $1 \leq n \leq 5$

folgenden Abschnitt untersucht werden, wie sich Diffusions- und Glättungszeit ändern, wenn man zum Mantel eine infinitesimal dünne Schicht mit dem Leitwert S hinzufügt.

3.3 Infinitesimal dünne Schicht

Die Diffusionszeiten $\tau_d(n)$ und die Glättungszeiten $\tau_s(n)$ eines Mantels mit der radialsymmetrischen elektrischen Leitfähigkeit $\sigma = \sigma(r)$ ergeben sich aus den Gleichungen (3.67) bis (3.70). In diesen Mantel sei eine infinitesimal dünne Schicht mit dem Leitwert S und dem Radius b eingebettet, so daß für die elektrische Leitfähigkeit

$$\hat{\sigma}(r) = \sigma(r) + S \delta(r - b) \quad (3.74)$$

gilt. Größen, die für den Mantel mit zusätzlicher Schicht gelten, sind mit einem Dach gekennzeichnet. Es erweist sich als zweckmäßig, die Hilfsfunktionen $\kappa_n^{R,T}$ einzuführen, die

eng mit den Gewichtsfunktionen verwandt sind. Es sei

$$\begin{aligned}\kappa_n^R(r; k) &:= \frac{1}{2n+1} \left[\frac{r}{c} - k \left(\frac{c}{r} \right)^{2n} \right] \quad \text{und} \\ \kappa_n^T(r; k) &:= \frac{1}{2n+1} \left[\frac{r}{c} + k \frac{n+1}{n} \left(\frac{c}{r} \right)^{2n} \right].\end{aligned}\tag{3.75}$$

Für $k = 1$ ist $\kappa_n^{R,T}(r; 1) = w_n^{R,T}(r/c)$. Für die Diffusionszeit folgt damit aus Gleichung (3.67) bzw. (3.68)

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_d^{R,T}(n) &= \mu_0 c \int_c^a [\sigma(r) + S \delta(r-b)] \kappa_n^{R,T}(r; 1) dr \\ &= \tau_d^{R,T}(n) + \mu_0 c S \kappa_n^{R,T}(b; 1).\end{aligned}\tag{3.76}$$

Die Diffusionszeit des Mantels mit einer infinitesimal dünnen Schicht ist also gleich der Summe aus der Diffusionszeit des Mantels ohne Schicht und der Diffusionszeit der Schicht. Für die Glättungszeit folgt aus Gleichung (3.69) bzw. (3.70)

$$\begin{aligned}[\hat{\tau}_s^{R,T}(n)]^2 &= [\tau_s^{R,T}(n)]^2 + [\mu_0 c S \kappa_n^{R,T}(b; 1)]^2 \\ &\quad + 2(\mu_0 c)^2 S \left\{ [\kappa_n^{R,T}(b; 1)]^2 \int_b^a \sigma(r) \left(\frac{b}{r} \right)^{2n} dr \right. \\ &\quad \left. + \int_c^b \sigma(r) \left(\frac{r}{b} \right)^{2n} [\kappa_n^{R,T}(r; 1)]^2 dr \right\}.\end{aligned}\tag{3.77}$$

Die Glättungszeit $\tau_s^{R,T}(n)$ läßt sich nicht einfach als Summe der Glättungszeit von Mantel ohne Schicht plus Glättungszeit der Schicht angeben, wie es bei der Diffusionszeit der Fall ist.

Die Gleichungen (3.76) und (3.77) enthalten den wichtigen Spezialfall eines nichtleitenden Mantels mit einer infinitesimal dünnen elektrisch leitenden Schicht. Wenn man $\sigma(r) = 0$ setzt, dann ist

$$\hat{\tau}_d^{R,T}(n) = \hat{\tau}_s^{R,T}(n) = \mu_0 c S \kappa_n^{R,T}(b; 1).\tag{3.78}$$

Für eine Schicht direkt an der Kern-Mantel-Grenze ($b = c$) ist $\hat{\tau}_d^R(n) = \hat{\tau}_s^R(n) = 0$, d. h. die radiale Komponente wird von der Schicht überhaupt nicht beeinflusst, wie am Ende von Abschnitt 3.2 gezeigt wurde. Will man eine ausgedehnte Schicht durch eine infinitesimal dünne Schicht approximieren, dann darf man also nicht $b = 0$ setzen, sondern muß b sorgfältig wählen.

3.4 Zeitkonstanten des geschichteten Mantels

Die Integrale in den Gleichungen (3.67) bis (3.68) für die Diffusions- und die Glättungszeit lassen sich zu Summen umformen, wenn man einen Mantel betrachtet, der aus Schichten

mit jeweils konstanter elektrischer Leitfähigkeit aufgebaut ist. Für die Leitfähigkeit in einem Mantel mit n Schichten soll gelten

$$\sigma(r) = \sigma_\ell \quad \text{für} \quad r_{\ell-1} \geq r > r_\ell, \ell = 1, \dots, L, \quad (3.79)$$

dabei ist $r_0 = a$ der Erdradius und $r_L = c$ der Radius der Kern-Mantel-Grenze, vgl. Abbildung 2.5. Die Integrale in den Gleichungen (3.67) und (3.68) können aufgeteilt werden in Integrale über Bereiche mit jeweils konstanter Leitfähigkeit. Für die Diffusionszeit erhält man unmittelbar

$$\begin{aligned} \tau_d^{R,T}(n) &= \mu_0 c \sum_{\ell=1}^L \sigma_\ell \int_{r_\ell}^{r_{\ell-1}} \kappa_n^{R,T}(r; 1) dr \\ &= \mu_0 c \sum_{\ell=1}^L \sigma_\ell \left[\frac{r}{2} \kappa_n^{R,T} \left(r; -\frac{2}{2n-1} \right) \right]_{r_\ell}^{r_{\ell-1}}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Für die Glättungszeit ergibt sich nach einer längeren elementaren Rechnung aus den Gleichungen (3.69) und (3.70)

$$\begin{aligned} [\tau_s^{R,T}(n)]^2 &= 2 (\mu_0 c^2)^2 \\ &\cdot \sum_{\ell=1}^L \left\{ \frac{\sigma_\ell^2}{(2n-3)^2} \left[\frac{1}{4(2n-1)} \left(\frac{r}{c} \right)^4 - 2 \left(\frac{r}{c} \right)^2 \left[\kappa_n^{R,T} \left(r; \frac{2n-3}{2(2n-1)} \right) \right]^2 \right]_{r_\ell}^{r_{\ell-1}} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\sigma_\ell I_\ell}{4} \right) \left[\frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \left(\frac{r}{c} \right)^{2n+3} - \left(\frac{r}{c} \right)^{2n+1} \left[\kappa_n^{R,T} \left(r; -\frac{2}{2n-1} \right) \right]^2 \right]_{r_\ell}^{r_{\ell-1}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

wobei zur Abkürzung

$$I_\ell := \sigma_\ell \left(\frac{c}{r_{\ell-1}} \right)^{2n-1} + \sum_{k=1}^{\ell-1} \sigma_k \left[\left(\frac{c}{r_{k-1}} \right)^{2n-1} - \left(\frac{c}{r_k} \right)^{2n-1} \right] \quad (3.82)$$

gesetzt worden ist. I_ℓ selbst hängt nicht vom Radius r ab.

Jetzt können die Zeitkonstanten eines Schichtmodells auf elementare Weise berechnet werden. Alternativ lassen sie sich unabhängig davon aus den Momenten von $\gamma_n^{R,T}(t)$ gewinnen, vgl. Gleichung (3.20) und (3.21). Bei der Implementierung der Algorithmen für beide Methoden kann durch den Vergleich der Ergebnisse sichergestellt werden, daß sie korrekt arbeiten. Die Diffusions- und Glättungszeiten für die Modelle S und SD sind in den Tabellen 3.1 und 3.2 zusammengefaßt. Die Tabellen enthalten zusätzlich die Werte für Modell S δ , das weiter unten eingeführt wird. Abbildung 3.3 zeigt die Zeitkonstanten der radialen Komponente für die Modelle S und SD.

Beim Vergleich der Zeitkonstanten der radialen und tangentialen Komponente ist zu beachten, daß sie aus der Impulsantwortfunktion der jeweiligen Komponente abgeleitet werden. Man betrachtet also zwei sehr unterschiedliche Fälle. An der Kern-Mantel-Grenze hat man im ersten Fall einen δ -Impuls in der radialen Komponente und im zweiten Fall

einen δ -Impuls in der tangentialen Komponente, wobei immer beide Komponenten präsent sind. Es gibt kein ausschließlich radiales oder ausschließlich tangenciales poloidales Magnetfeld.

Betrachtet man zunächst nur die radiale Komponente (Tabelle 3.1 und Abbildung 3.3), dann stellt man fest, daß alle Zeitkonstanten kleiner als 1000 d (ca. 2.7 a) sind. Die Gewichtsfunktionen $w_n^R(r)$, Gleichung (3.71), führen dazu, daß die Diffusionszeiten $\tau_d^R(n)$ ungefähr mit $1/n$ abfallen. Interessant ist ebenfalls der Vergleich mit den Maximumzeiten $\tau_{\max}^R(n)$ (siehe Tabelle 2.1), wobei $\tau_{\max}^R(n) < \tau_d^R(n)$ ist. Der Grund liegt im steilen Anstieg der Impulsantwortfunktion $\gamma_n^R(t)$ auf das Maximum und der anschließenden langsamen Abnahme, wodurch der Schwerpunkt der Fläche unter der Kurve $\gamma_n^R(t)$, der gleich der Diffusionszeit $\tau_d^R(n)$ ist, gegenüber dem Maximum zu späteren Zeiten hin verschoben ist. Die Glättungszeiten $\tau_s^R(n)$ sind kleiner als die entsprechenden Diffusionszeiten $\tau_d^R(n)$ und verlaufen qualitativ ähnlich. Backus (1983) gibt Schranken für das Verhältnis $\tau_s^R(n)/\tau_d^R(n)$ unter der Voraussetzung $\partial_r \sigma(r) < 0$ an. Es gilt $\tau_s^R(n)/\tau_d^R(n) < \sqrt{2/3} \approx 0.83$. Diesen Wert erhielt man bereits als Grenzwert für eine dünne Schicht an der Kern-Mantel-Grenze im Zusammenhang mit den Gleichungen (3.72) und (3.73) auf Seite 71. Die untere Schranke, die vom Grad n und $\sigma(a)$ sowie $\sigma(c)$ abhängt, ist komplizierter, siehe dazu Backus (1983). Die hier betrachteten Schichtmodelle S und SD erfüllen die Voraussetzung zwar nicht, aber auch bei ihnen nimmt die elektrische Leitfähigkeit mit r ab (wenn auch nicht streng monoton). Insofern überrascht es nicht, daß die Werte, die man für $\tau_s^R(n)/\tau_d^R(n)$ aus der Tabelle 3.1 erhält, innerhalb der Schranken liegen. Für Modell S ist $\tau_s^R(1)/\tau_d^R(1) \approx 0.53$ und $\tau_s^R(10)/\tau_d^R(10) \approx 0.18$, für Modell SD ist $\tau_s^R(1)/\tau_d^R(1) \approx 0.54$ und $\tau_s^R(10)/\tau_d^R(10) \approx 0.50$. Die Unterschiede zwischen den Modellen beruhen auf der deutlich höheren elektrischen Leitfähigkeit des Modells SD in den untersten 250 km des Mantels. Der Leitwert des gesamten Mantels ist $S = 12.48$ MS für Modell S bzw. $S = 510.2$ MS für Modell SD. Zwischen den Leitwerten liegt der Faktor 41, der sich insbesondere bei kleinen Graden n nicht in vollem Umfang auf die Zeitkonstanten auswirkt, die sich für $n = 1$ nur um ungefähr den Faktor 8 unterscheiden.

Ein ganz anderes Bild ergibt sich für die tangentialen Komponente, vgl. Tabelle 3.2. Hier liegt für $n = 1$ ein Faktor von 45.5 zwischen den Diffusionszeiten $\tau_d^T(1)$ der Modelle S bzw. SD. Die Zeitkonstanten $\tau_d^T(n)$ und $\tau_s^T(n)$ der tangentialen Komponente nehmen wie die der radialen Komponente etwa mit $1/n$ ab. Es ist $\tau_d^R(n) < \tau_d^T(n)$, was sofort aus dem Vergleich der Gewichtsfunktionen $w_n^R(r)$ und $w_n^T(r)$ folgt. Die Schranken, die Backus (1983) für die radiale Komponente angibt, gelten nicht für die tangentialen Komponente. Für Modell SD gilt $\tau_s^T(n) \approx \tau_d^T(n)$ (wobei $\tau_s^T(n) < \tau_d^T(n)$ ist). Der entscheidende Unterschied liegt in der Größe der Zeitkonstanten, die bei Modell SD für $n = 1$ immerhin $\tau_d^T(1) \approx \tau_s^T(1) \approx 25\,000$ d (ca. 68 a) betragen, also Werte annehmen, die klar im Bereich der Säkularvariation liegen. Für das Modell S sind die Zeitkonstanten mit Werten unter 550 d (ca. 1.5 a) hingegen vergleichsweise klein. Wie sich schon in Abschnitt 2.9 beim Vergleich der radialen, $I_n^R(\omega)$, und tangentialen, $I_n^T(\omega)$, Übertragungsfunktionen für die Modelle S und SD abzeichnete und die Gewichtsfunktionen $w_n^{R,T}(r)$ klar zeigten, wird die radiale Komponente von der elektrischen Leitfähigkeit nahe der Kern-Mantel-Grenze weit weniger beeinflusst als die tangentialen. Leider ist man bei der Suche nach der tatsächlichen Leitfähigkeitsverteilung auf die radiale Komponente angewiesen, wie der nächste Abschnitt zeigen wird.

n	$\tau_d^R(n)$ [d]		
	Modell S	Modell SD	Modell S δ
1	122.06	986.64	821.39
2	96.91	923.74	757.97
3	79.56	871.09	705.14
4	67.08	825.59	659.77
5	57.80	785.38	619.95
6	50.68	749.26	584.46
7	45.06	716.43	552.48
8	40.54	686.35	523.42
9	36.83	658.61	496.86
10	33.73	632.90	472.47
11	31.10	608.98	449.98
12	28.85	586.65	429.18
13	26.90	565.76	409.91
14	25.20	546.16	391.99
15	23.70	527.75	375.32

(a) Diffusionszeit $\tau_d^R(n)$ der radialen Komponente

n	$\tau_s^R(n)$ [d]		
	Modell S	Modell SD	Modell S δ
1	88.86	727.22	727.42
2	65.53	681.90	680.54
3	50.02	642.46	639.90
4	39.34	607.17	603.71
5	31.75	575.07	570.96
6	26.20	545.57	541.04
7	22.03	518.29	513.53
8	18.82	492.95	488.13
9	16.30	469.35	464.60
10	14.28	447.31	442.77
11	12.64	426.70	422.46
12	11.29	407.40	403.54
13	10.16	389.30	385.90
14	9.21	372.31	369.42
15	8.39	356.34	354.02

(b) Glättungszeiten $\tau_s^R(n)$ der radialen Komponente

Tabelle 3.1: Radiale Zeitkonstanten für die Schichtmodelle S, SD und S δ

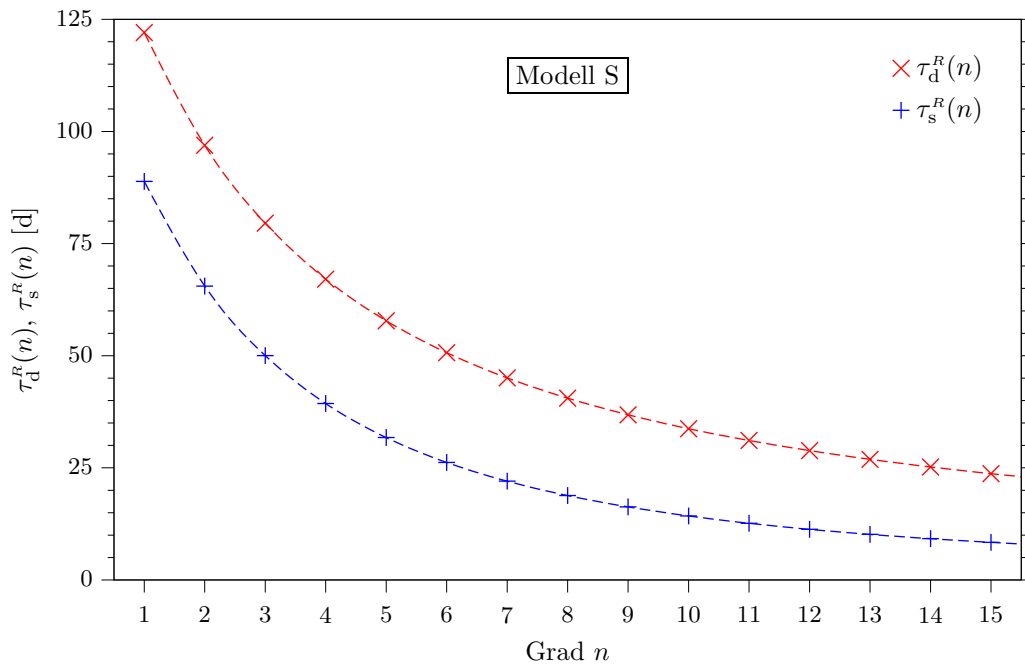
n	$\tau_d^T(n)$ [d]		
	Modell S	Modell SD	Modell S δ
1	547.63	24921	12167
2	250.50	12062	5768
3	157.84	7803	3663
4	114.08	5692	2628
5	88.99	4436	2018
6	72.84	3608	1620
7	61.61	3023	1341
8	53.36	2590	1137
9	47.05	2257	982
10	42.08	1993	861
11	38.05	1781	765
12	34.72	1606	686
13	31.93	1460	621
14	29.56	1336	566
15	27.51	1230	520

(a) Diffusionszeit $\tau_d^T(n)$ der tangentialen Komponente

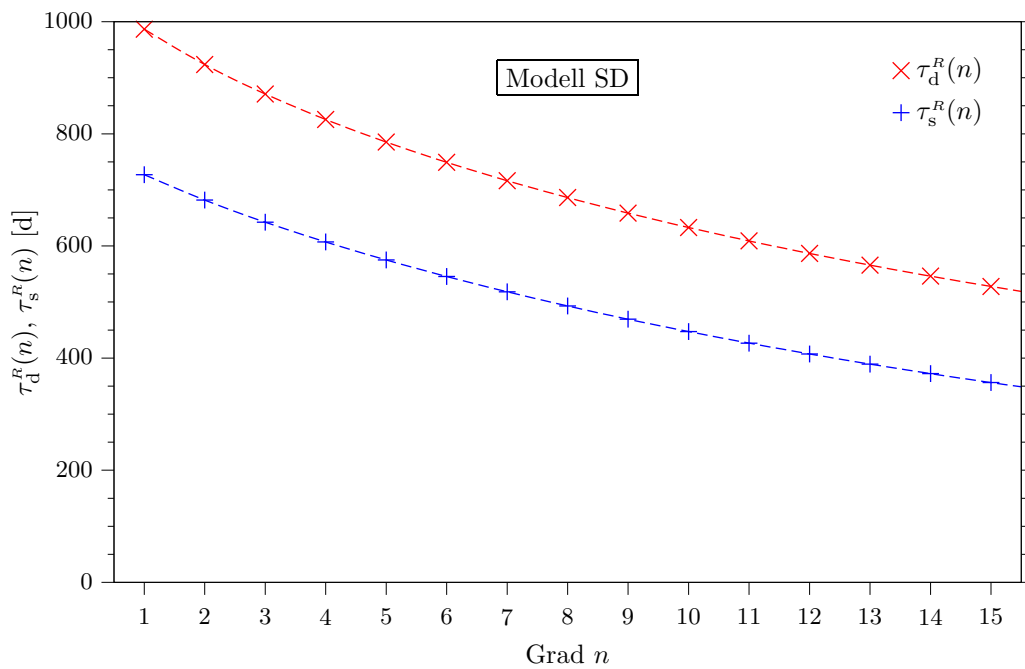
n	$\tau_s^T(n)$ [d]		
	Modell S	Modell SD	Modell S δ
1	490.53	24521	12068
2	199.75	11684	5687
3	112.72	7443	3595
4	73.78	5346	2569
5	52.74	4102	1967
6	39.98	3284	1574
7	31.61	2708	1300
8	25.78	2282	1100
9	21.54	1956	948
10	18.35	1700	830
11	15.87	1494	735
12	13.91	1325	659
13	12.31	1184	595
14	11.00	1066	542
15	9.91	966	497

(b) Glättungszeit $\tau_s^T(n)$ der tangentialen Komponente

Tabelle 3.2: Tangentiale Zeitkonstanten für die Schichtmodelle S, SD und S δ



(a) Diffusionszeit $\tau_d^R(n)$ und Glättungszeit $\tau_s^R(n)$ für Modell S



(b) Diffusionszeit $\tau_d^R(n)$ und Glättungszeit $\tau_s^R(n)$ für Modell SD

Abbildung 3.3: Vergleich der Zeitkonstanten des Modells S (oben) und des Modells SD (unten) für die radiale Komponente

In Vorbereitung auf Kapitel 5 soll das Modell SD mit einer ausgedehnten D'' -Schicht durch ein neues Modell $S\delta$ mit einer infinitesimal dünnen Schicht approximiert werden. Modell SD unterscheidet sich nur im Bereich der untersten 250 km von Modell S. Dort ist die Leitfähigkeit von Modell SD wesentlich höher als die von Modell S. (vgl. die Beschreibung der Modelle in Abschnitt 1.4 und Abbildung 1.11). Entsprechend bildet Modell S auch den Ausgangspunkt für das neue Modell $S\delta$. Die infinitesimal dünne δ -Schicht im neuen Modell soll so gewählt sein, daß die Glättungszeiten der radialen Komponente mit denen des Modells SD ungefähr übereinstimmen. Diese Forderung ergibt sich einfach daraus, daß im Zusammenhang mit den in Kapitel 5 betrachteten Feldänderungen die Glättungszeiten eine weit wichtigere Rolle spielen als die Diffusionszeiten. Für die δ -Schicht des Modells $S\delta$ findet man als geeignete Parameter den Radius $b = 3691$ km, d. h. sie ist 210 km oberhalb der Kern-Mantel-Grenze, und den Leitwert $S = 242.5$ MS, der nur knapp halb so groß ist wie der Leitwert der D'' -Schicht des Modells SD von 500 MS. Die gute Übereinstimmung der Glättungszeiten $\tau_s^R(n)$ der Modelle SD und $S\delta$ belegt Tabelle 3.1b. Die Diffusionszeit $\tau_d^R(n)$ (vgl. Tabelle 3.1a) liegt für $n = 1$ etwa 15 % und für $n = 10$ sogar 25 % unter der des Modells SD, allerdings sind diese Abweichungen für die Zwecke des Kapitels 5 unerheblich. Tatsächlich handelt es sich bei Modell $S\delta$ nur um einen Zwischenschritt hin zum lateral inhomogenen Modell $S\delta_2$, das schon in Abschnitt 1.4 erwähnt wird und nach seiner Einführung in Abschnitt 5.1.3 in Kapitel 5 durchgehend verwendet wird.

3.5 Rolle der Komponenten

Beim Vergleich der Zeitkonstanten der radialen und der tangentialen Komponente im letzten Abschnitt zeigte sich, daß in der tangentialen Komponente die Unterschiede zwischen den Modellen S und SD deutlicher hervortreten als in der radialen Komponente. Unglücklicherweise läßt sich die tangential Komponente nicht so gut zur Abschätzung der elektrischen Leitfähigkeit nutzen. Der Grund dafür ist, daß für die Diffusion vom Kern zur Erdoberfläche die radiale Komponente maßgeblich ist, weil sie im Gegensatz zur tangentialen Komponente an der Kern-Mantel-Grenze stetig ist und die tangential Komponente aus der radialen Komponente folgt. Das wiederum hängt damit zusammen, daß der Kern als ideal leitend behandelt wird – eine durchaus übliche Annahme. Entsprechend wird der radialen Komponente größeres Interesse entgegengebracht, z. B. Constable (1993) oder Ballani et al. (2002). Beispielsweise ist es möglich, aus der Fortsetzung von dB_r/dt und B_r , die beide bei $r = c$ stetig sind, Rückschlüsse auf die tangential Strömung \mathbf{u}_s an der Oberfläche des Kerns zu ziehen. Wieder unter der Annahme, daß der Kern ideal leitend ist, gilt

$$\frac{dB_r}{dt} = -\nabla_s(\mathbf{u}_s B_r), \quad (3.83)$$

z. B. Backus et al. (1996).

Es gibt ein Problem, bei dem die tangential Komponente doch eine Rolle spielt. Setzt man das Mauersberger-Lowes-Spektrum von der Erdoberfläche an die Kern-Mantel-Grenze fort, dann gehen sowohl die radiale als auch die tangential Komponente ein. Da das Mauersberger-Lowes-Spektrum (siehe Gleichung (4.18) in Abschnitt 4.2) ein Maß

für die mittlere Energiedichte auf der Kugelschale ist, könnte sich hier eine Möglichkeit ergeben, abzuschätzen, ob ein gegebenes Leitfähigkeitsmodell realistisch ist.

Die Beziehung zwischen radialer und tangentialer Komponente an der Kern-Mantel-Grenze soll kurz an einem Beispiel veranschaulicht werden. Dazu wird der axiale Dipol $n = 1$, $m = 0$ betrachtet, bei dem die tangentiale Komponente in ϑ -Richtung liegt, d. h. $B_\varphi = 0$. Die Abhängigkeit der r - und ϑ -Komponente von ϑ , nämlich $B_r \sim \cos \vartheta$ und $B_\vartheta \sim \sin \vartheta$, spielt hier keine Rolle, daher soll nur der von ϑ unabhängige Anteil betrachtet werden. An der Kern-Mantel-Grenze wird die Anregung für die radiale Komponente vorgegeben durch

$$B_r(c, t) = B_0 \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_c^2}\right), \quad (3.84)$$

wobei σ_c wie in Gleichung (3.28) die Zeitkonstante ist, die die Breite der Anregung an der Kern-Mantel-Grenze festlegt. Nach Gleichung (2.125) läßt sich $B_r(a, t)$ bestimmen, wodurch auch $B_\vartheta(a, t)$ festgelegt ist, vgl. Abschnitt 2.8.2. Für $n = 1$ ist $B_\vartheta(a, t) = B_r(a, t)/2$. Aus $B_\vartheta(a, t)$ wiederum läßt sich $B_\vartheta(c, t)$ berechnen. Die Ergebnisse für $\sigma_c = 40$ d, 400 d und 4000 d zeigen die Abbildungen 3.4 bis 3.6.

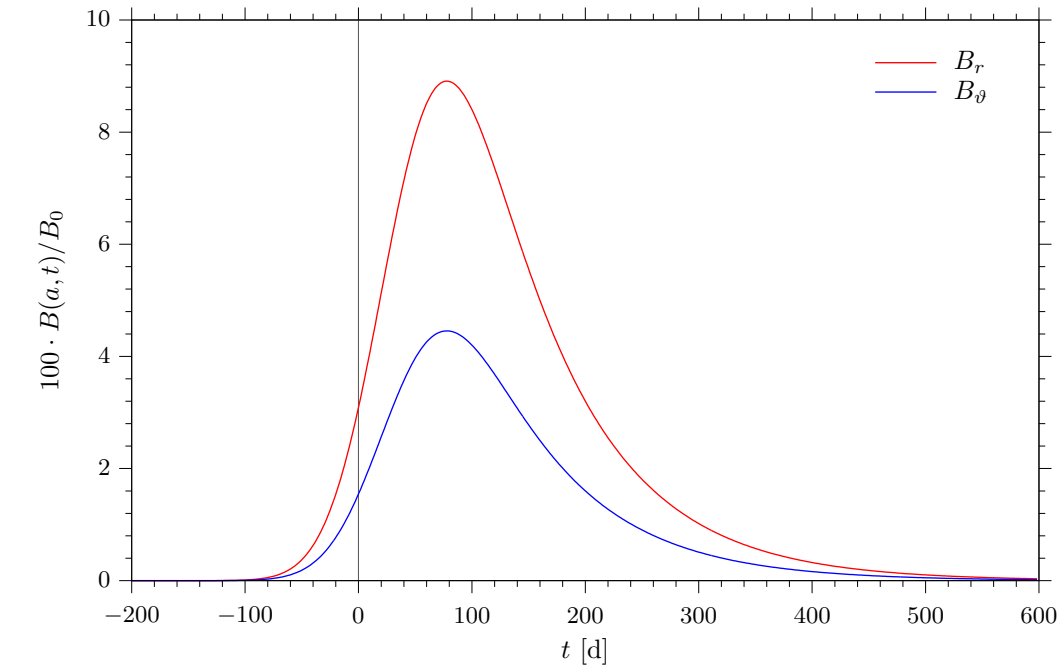
In Abbildung 3.4 ist $\sigma_c = 40$ d $< \tau_s^R(1) < \tau_s^T(1)$, und man erkennt an der Erdoberfläche nicht nur die zeitliche Verzögerung, sondern auch die glättende sowie verzerrende Wirkung des Mantels. Viel interessanter ist der Verlauf der tangentialen Komponente an der Kern-Mantel-Grenze. Das Maximum von $B_\vartheta(c, t)$ ist größer und wird früher angenommen als das von $B_r(c, t)$. Der steile und starke Anstieg von $B_\vartheta(c, t)$ wird wenig später durch ein Minimum kompensiert. In Abbildung 3.5 ist das Maximum von $B_\vartheta(c, t)$ bereits etwas kleiner als das von $B_r(c, t)$ und in Abbildung 3.6 ähnelt der Verlauf von $B_\vartheta(c, t)$ sehr dem Verlauf von $B_r(c, t)/2$, allerdings erreicht $B_\vartheta(c, t)$ wegen der größeren Diffusionszeit sein Maximum immer vor $B_r(c, t)$.

3.6 Bedeutung der Zeitkonstanten

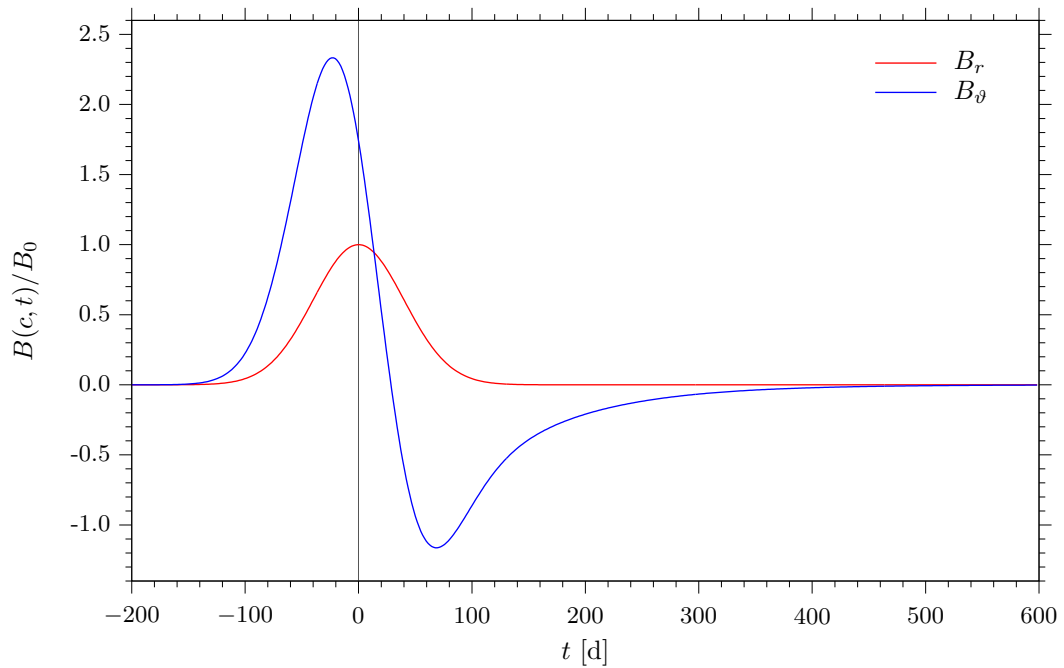
Die Zeitkonstanten lassen sich für Schichtmodelle schnell und unkompliziert ermitteln und ermöglichen den einfachen Vergleich derartiger Modelle. So läßt sich beispielsweise abschätzen, ob die Erhöhung der Leitfähigkeit einer Schicht um einen bestimmten Betrag zu einer merklichen Veränderung der Eigenschaften des gesamten Modells führt. Allerdings muß man bedenken, daß die Zeitkonstanten den Mantel nur näherungsweise für kleine Frequenzen beschreiben können.

Ein Vorteil der Zeitkonstanten ist, daß sie eine Zeitskala festlegen. Änderungen, die im Vergleich mit ihnen langsam verlaufen, werden praktisch kaum vom Mantel beeinflusst, der in diesem Fall mit der Backusschen Näherung oder im Extremfall als nichtleitender Mantel behandelt werden kann. In Abschnitt 3.1 wurde die Backussche Näherung an einem Beispiel untersucht, vgl. Abbildung 3.1.

Für komplexere Leitfähigkeitsmodelle lassen sich immerhin Schranken für die Zeitkonstanten angeben, indem man sie durch Schichtmodelle mit höheren und niedrigeren Leitfähigkeiten einschachtelt – im Sinne von Ober- und Untersummen.

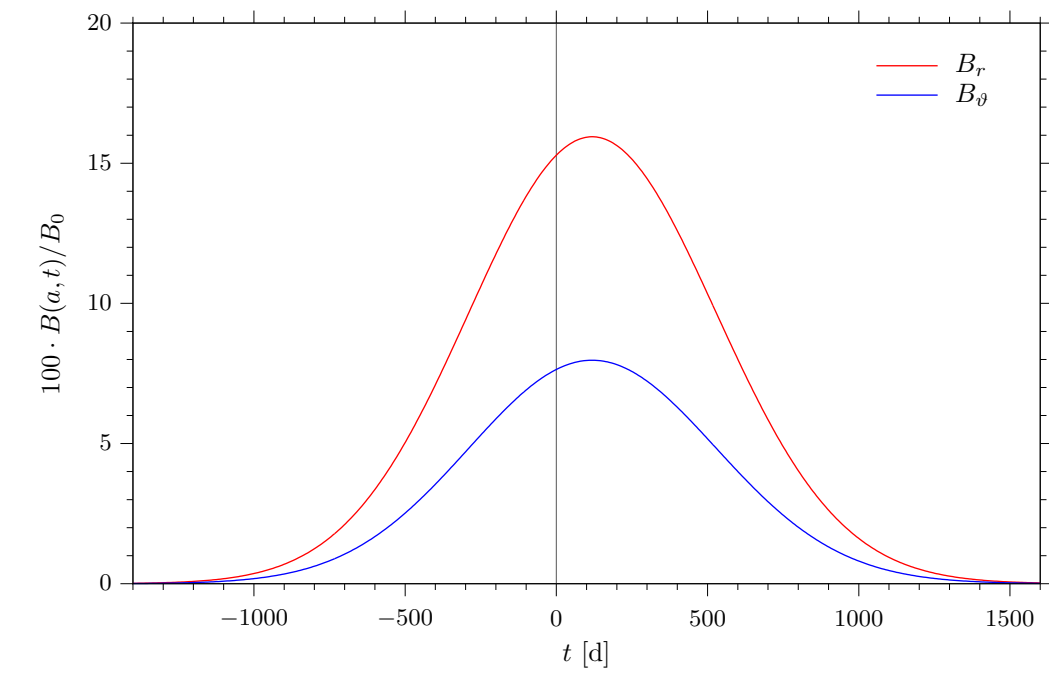


(a) Erdoberfläche

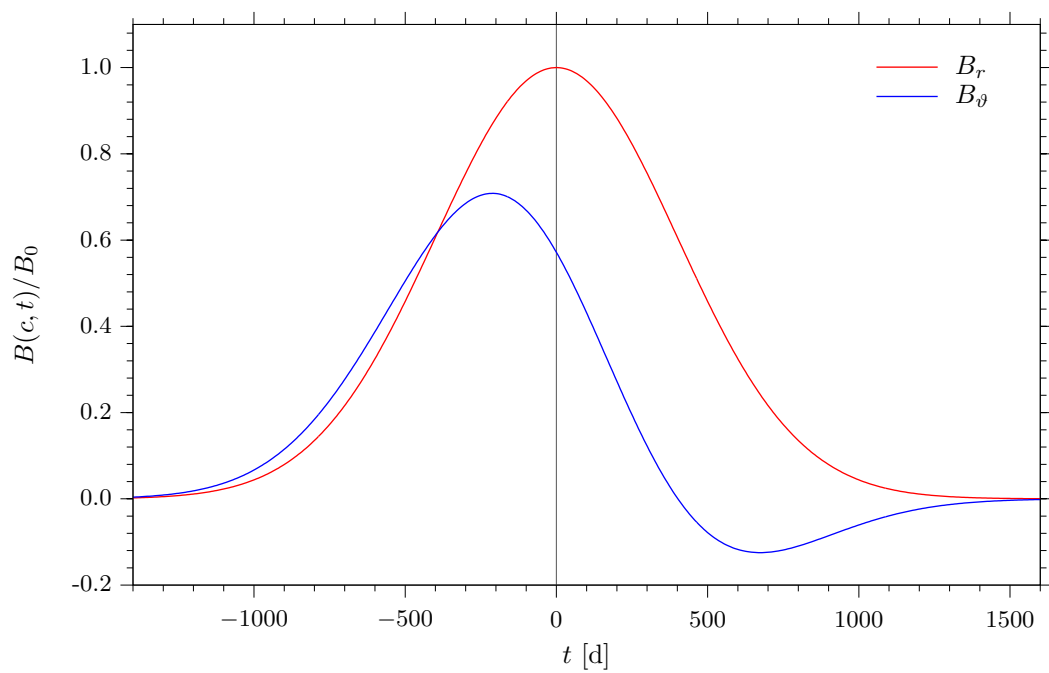


(b) Kern-Mantel-Grenze

Abbildung 3.4: Dargestellt ist der zeitliche Verlauf der radialen Komponente $B_r(t)$ und der tangentialen Komponente $B_\theta(t)$ des axialen Dipols an der Erdoberfläche (oben) und an der Kern-Mantel-Grenze (unten). Vorgegeben ist $B_r(t)$ an der Kern-Mantel-Grenze in Form einer Gauß-Funktion mit dem Parameter $\sigma_c = 40$ d (vgl. Text).

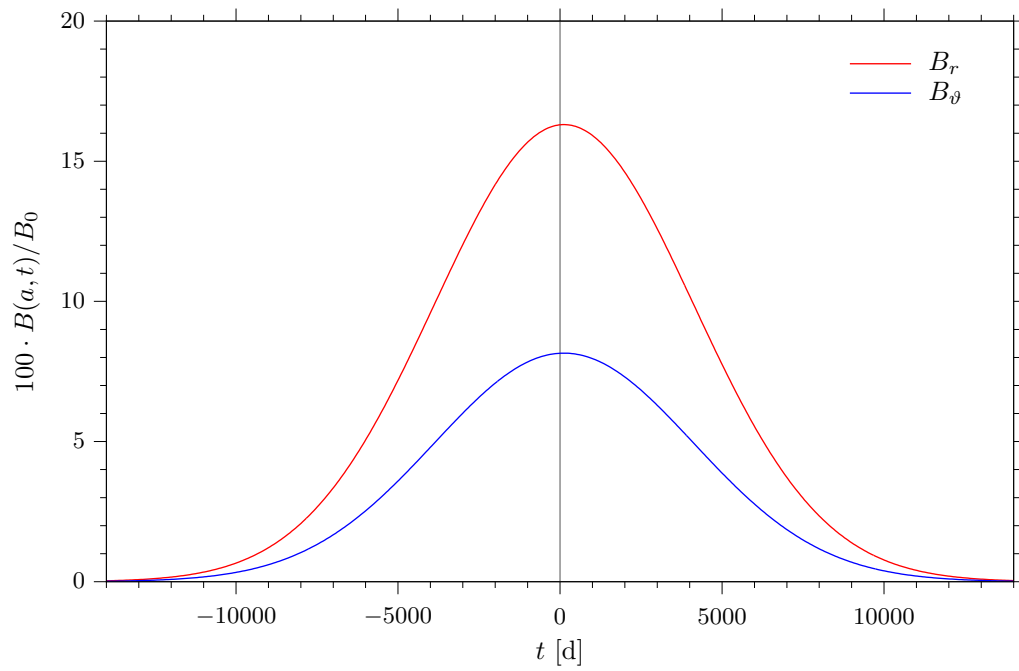


(a) Erdoberfläche

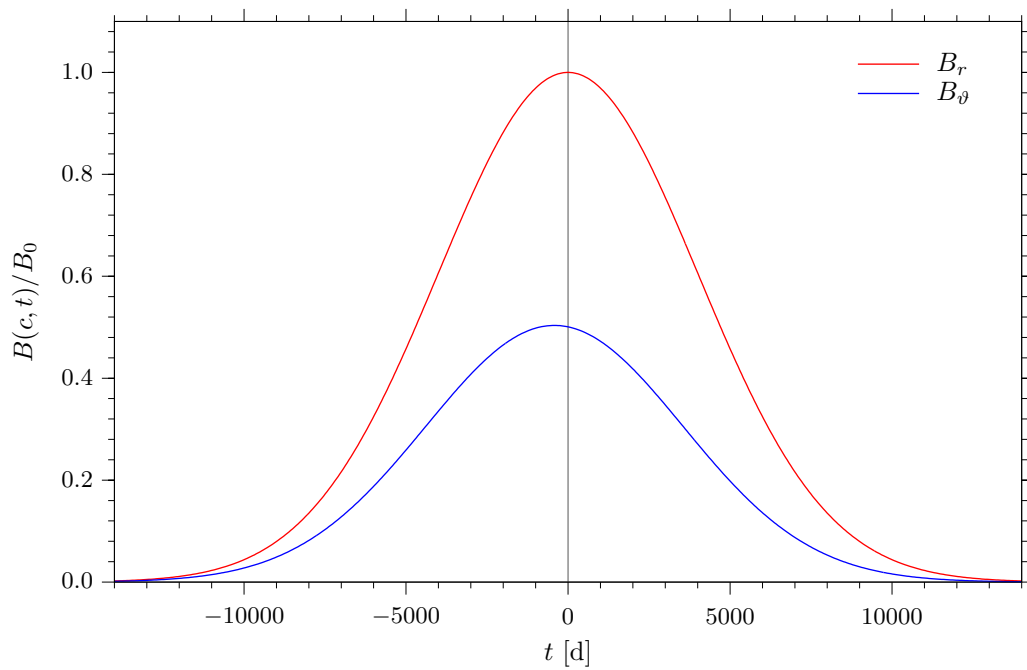


(b) Kern-Mantel-Grenze

Abbildung 3.5: wie Abbildung 3.4, aber mit $\sigma_c = 400$ d



(a) Erdoberfläche



(b) Kern-Mantel-Grenze

Abbildung 3.6: wie Abbildung 3.4, aber mit $\sigma_c = 4000$ d

Die Zeitkonstanten können sogar für lateral inhomogene Modelle von Nutzen sein, wenn Bereiche mit konstanten aber unterschiedlichen Leitfähigkeiten eine große laterale Ausdehnung besitzen. Man kann in diesen Fällen die Zeitkonstanten homogener Schichtmodelle mit entsprechenden Leitfähigkeiten berechnen. Ihr Vergleich liefert erste grobe Rückschlüsse, ob sich die laterale Inhomogenität an der Erdoberfläche bemerkbar macht. Eine genaue Berechnung, wie sie in Kapitel 5 erfolgt, ist jedoch unerlässlich.

Die Diffusionszeit ist insbesondere im Zusammenhang mit den geomagnetischen Jerks von Interesse, die mit Tageslängenänderungen in Zusammenhang gebracht werden, siehe Abschnitte 1.2.2 und 1.3.2. Die Arbeit von Backus (1983) wendet die Filtertheorie auf den Jerk von 1969 an, wobei damals die Hypothese vertreten wurde, daß der Jerk mit einer Änderung in der Tageslänge von 1956 zusammenhängt. Neuere Arbeiten gehen von einem deutlich kürzeren zeitlichen Abstand aus. Die Arbeit von Holme und de Viron (2005) kommt zu dem Ergebnis, daß zwischen den Jerks und damit verbundenen Polhöschwankungen weniger als 3 a vergehen, Gibert et al. (1998) schätzen ab, daß zwischen der Änderung in der Tageslänge und dem Auftreten des Jerks weniger als 1 a liegt, und Nagao et al. (2003) gehen von einer Dauer von etwa 1 a oder weniger aus. Diese Beobachtungen lassen sich problemlos mit den Zeitkonstanten des Modells S vereinbaren, und selbst die Zeitkonstanten des Modells SD stehen trotz der sehr hohen elektrischen Leitfähigkeit in der D''-Schicht nicht im Widerspruch zu ihnen, wenn man bedenkt, daß beim δ -Impuls das Maximum in kürzerer Zeit als der Diffusionszeit die Erdoberfläche erreichen kann (vgl. Tabelle 2.1 auf Seite 56). Jerks stellen insofern eine Besonderheit dar, als im allgemeinen Magnetfeldänderungen nicht mit Vorgängen an der Kern-Mantel-Grenze in Verbindung gebracht werden können, die der Beobachtung an der Erdoberfläche zugänglich sind. Gewöhnlich besitzt man keine Informationen über die Laufzeit durch den Mantel. Aus diesem Grund tritt die Diffusionszeit seltener in Erscheinung als die Glättungszeit. In den letzten beiden Kapiteln spielt die Glättung des geomagnetischen Spektrums durch den Mantel eine zentrale Rolle.

Kapitel 4

Statistische Magnetfeld-Anregung

Die Anregung an der Kern-Mantel-Grenze wird in diesem Kapitel durch ein einfaches statistisches Modell beschrieben, in dem die Gauß-Koeffizienten $G_n^m(t)$ und $H_n^m(t)$ der radialen Komponente an der Kern-Mantel-Grenze als Realisierungen von stationären Gauß-Prozessen betrachtet werden. Statistische Annahmen über das Erdmagnetfeld werden bereits von McDonald (1957) im Zusammenhang mit der elektrischen Leitfähigkeit des Erdmantels verwendet, und McLeod (1986) führt das Erdmagnetfeld als ein Beispiel für einen statistischen Prozeß auf der Kugel an. Allgemein finden Zufallsprozesse zahlreiche Anwendungen in den Geowissenschaften (vgl. Meier und Keller, 1990). Für die Untersuchung der Diffusion des Magnetfeldes durch den Mantel bietet sich ein statistisches Modell an, weil es die Modellierung zeitlicher Schwankungen des Erdmagnetfeldes mit einer sehr geringen Anzahl von Parametern ermöglicht.

Die bisher betrachteten Anregungsformen, nämlich die harmonische Anregung und der δ -Impuls, sind zwar von grundlegender Bedeutung, haben aber kaum Gemeinsamkeiten mit dem beobachteten zeitlichen Verlauf des Erdmagnetfeldes, wenn man von besonderen Eigenschaften des Erdmagnetfeldes wie der Westdrift und den Jerks absieht. Die Verwendung realer Daten ist äußerst schwierig. Es führt nichts an dem grundsätzlichen Problem vorbei, daß sowohl die Anregung an der Kern-Mantel-Grenze, das Eingangssignal, als auch der Erdmantel, der Filter, nicht bekannt sind. Es sind nur Daten vom gefilterten Ausgangssignal verfügbar, die im Umfang und in der Auflösung beschränkt sind.

Es bietet sich daher an, Modelle für die Anregung an der Kern-Mantel-Grenze, wie beispielsweise Dynamomodelle, zu verwenden. Allerdings sind Dynamomodelle äußerst kompliziert, und sie machen vereinfachende Annahmen, die tendenziell zu einer Unterdrückung von kleinräumigen und kurzzeitigen Variationen führen können. Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung statistischer Modelle. Sie sind einfach zu handhaben und liefern gleichzeitig gute Modelle für komplexe Vorgänge (z.B. Blackman und Tukey, 1958). Darüberhinaus erlauben statistische Modelle eine abstrakte Behandlung des Problems. Stellt man sich auf den Standpunkt, daß die Anregung als statistischer Prozeß angesehen werden kann, so stellt das beobachtete Erdmagnetfeld nur eine Realisierung dieses Prozesses dar. Aussagen, die sich auf den statistischen Prozeß beziehen, beschreiben die Eigenschaften aller Realisierungen. Für die Modellierung des Magnetfeldes an der Kern-Mantel-Grenze werden stationäre Gauß-Prozesse verwendet, deren wichtigste Eigenschaften in Abschnitt 4.1 kurz zusammengefaßt werden. Mit Hilfe dieser Prozesse wird es möglich die Diffusion des Magnetfeldes durch den Mantel in Abhängigkeit von den Korrelationszeiten des Magnetfeldes an der Kern-Mantel-Grenze und den Zeitkonstanten des Mantels zu untersuchen. Als Zeitkonstanten des Erdmantels dienen die in Kapitel 3 eingeführten Diffusions- und Glättungszeiten. Für das Magnetfeld an der Erd-

oberfläche sind verschiedene Korrelationszeiten gebräuchlich. Ihnen gemeinsam ist, daß sie als Abklingparameter in der Autokovarianzfunktion auftreten und damit als Maß für den Zeitraum aufgefaßt werden können, über den das Magnetfeld merklich korreliert ist, daher stammt ihre Bezeichnung. Abschnitt 4.2 führt neben Beispielen für gebräuchliche Korrelationszeiten auch statistische Modelle für zeitlich konstante Gauß-Koeffizienten an der Erdoberfläche auf, aus denen insbesondere die Beziehung zwischen den verschiedenen Graden n hervorgeht. Die Ideen, die diesen Modellen zugrunde liegen, werden dann auf statistische Modelle für das Magnetfeld an der Kern-Mantel-Grenze übertragen. Wie sich die statistische Anregung des Magnetfeldes an der Kern-Mantel-Grenze mit der Übertragungsfunktion $\Gamma(\omega)$ aus Abschnitt 2.8.3 an die Erdoberfläche fortsetzen läßt, zeigt Abschnitt 4.3. Der Einfluß des Mantels wird in Abschnitt 4.4 an zwei Beispielen untersucht, im ersten Beispiel wird ein zeitlich weißes Spektrum des Magnetfeldes an der Kern-Mantel-Grenze angenommen, im zweiten ein rotes Spektrum. Die Korrelationszeit an der Erdoberfläche wird aus der Korrelationszeit an der Kern-Mantel-Grenze und der Glättungszeit des Mantels abgeschätzt, die in Kapitel 3 eingeführt wurde. Zum Schluß wird die Bedeutung der Glättungszeit an Realisierungen eines stationären Gauß-Prozesses veranschaulicht.

Als Eingangssignal wird in diesem Kapitel ausschließlich die radiale Komponente des poloidalen Magnetfeldes an der Kern-Mantel-Grenze verwendet. Das toroidale Magnetfeld ist hier nicht von Interesse, weil es praktisch nicht beobachtbar ist (Abschnitt 2.6). Die radiale Komponente wird vorgegeben, weil sie im Gegensatz zur tangentialen Komponente an der Kern-Mantel-Grenze stetig ist und die tangentiale Komponente festlegt (Abschnitt 3.5). Die Beispiele verwenden das Schichtmodell S, die Ergebnisse gelten analog auch für Modell SD.

4.1 Stationäre Gauß-Prozesse

Bei stationären Gauß-Prozessen handelt es sich um stochastische Prozesse. Der allgemeine Begriff des stochastischen Prozesses wird z. B. bei Fisz (1958) eingeführt als eine Menge von Zufallsvariablen $\Xi(t)$, die von einem reellen Parameter t abhängen. Stochastische Prozesse werden auch als zufällige oder regellose Prozesse bezeichnet. Der Parameter t soll im folgenden die Zeit bezeichnen. Im allgemeinen kann t sowohl diskret als auch kontinuierlich sein. Für beliebiges, aber festes t ist $\Xi(t)$ eine Zufallsvariable. Für fest gewählte Elementarereignisse ist $x(t)$ eine Funktion des reellen Arguments t . Jede solche (zufällige) Funktion $x(t)$ wird eine Realisierung des stochastischen Prozesses $\Xi(t)$ genannt, und man kann einen stochastischen Prozeß als eine Menge von zufälligen Funktionen auffassen, die den Elementarereignissen zugeordnet sind.

Ein stochastischer Prozeß $\Xi(t)$ heißt *stationärer Prozeß*, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\Xi(t)$ für alle t gleich ist (Gnedenko, 1991). Damit hängt ein beliebiges quantitatives Merkmal des stationären Prozesses $\Xi(t)$ nicht vom Zeitpunkt t ab. Insbesondere gelten für den Erwartungswert $E[\Xi(t)]$ und die Varianz $\text{Var}[\Xi(t)]$ die Gleichungen

$$E[\Xi(t)] = E[\Xi(t+u)] = E[\Xi(0)] =: a, \quad (4.1)$$

$$\text{Var}[\Xi(t)] = \text{Var}[\Xi(t+u)] = \text{Var}[\Xi(0)] =: \sigma^2. \quad (4.2)$$

Außerdem hängt die Autokovarianzfunktion $R(u)$ des stationären Prozesses,

$$R(u) := E[(\Xi(t+u) - a)(\Xi(t) - a)] = E[(\Xi(u) - a)(\Xi(0) - a)] , \quad (4.3)$$

ausschließlich vom Zeitabstand u ab, nicht jedoch vom Zeitpunkt t .

Ein wichtiges Beispiel für einen stationären Prozeß ist der *stationäre Gauß-Prozeß* oder *normale stationäre Prozeß*. Für den stationären Gauß-Prozeß gilt, daß für alle t die Zufallsvariable $\Xi(t)$ einer Normal- bzw. Gauß-Verteilung \mathcal{N} mit Mittelwert a und Standardabweichung σ entstammt:

$$\Xi(t) \in \mathcal{N}(a, \sigma) . \quad (4.4)$$

Eine bedeutende Eigenschaft stationärer Gauß-Prozesse ist ihre Ergodizität, die sich vereinfacht formulieren läßt als: „Zeitmittel ist gleich Scharmittel“. Allerdings muß die Autokovarianzfunktion des stationären Gauß-Prozesses dazu die Bedingung

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |R(u)| du \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

erfüllen (siehe z. B. Bendat und Piersol, 1971). Unter dieser Voraussetzung gilt für eine Realisierung $x(t)$ des stationären Gauß-Prozesses $\Xi(t)$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt = E[\Xi(t)] = a , \quad (4.6)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - a]^2 dt = E[(\Xi(t) - a)^2] = \text{Var}[\Xi(t)] = \sigma^2 \quad (4.7)$$

sowie

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t+u) - a][x(t) - a] dt = E[(\Xi(t+u) - a)(\Xi(t) - a)] = R(u) , \quad (4.8)$$

wobei Gleichung (4.7) als Spezialfall aus Gleichung (4.8) für $u = 0$ folgt. Es ist also möglich aus den statistischen Eigenschaften einer Realisierung $x(t)$ auf die Eigenschaften des stationären Gauß-Prozesses $\Xi(t)$ selbst zu schließen. Es ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich, $a = 0$ und $\sigma = 1$ anzunehmen, da ein beliebiger stationärer Gauß-Prozeß nach der Transformation (Standardisierung)

$$\frac{\Xi(t) - a}{\sigma} \quad (4.9)$$

diese Voraussetzungen erfüllt. Die Autokovarianzfunktion kann dann vereinfacht geschrieben werden als

$$R(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+u) x(t) dt . \quad (4.10)$$

Hier wird noch einmal deutlich, daß die Autokovarianzfunktion nur vom zeitlichen Abstand u abhängt.

Das Transformationstheorem von Wiener und Chintschin verknüpft die Autokovarianzfunktion $R(u)$ und die quadratische Spektraldichte $I(\omega)$, die ein Fourier-Transformations-Paar bilden (vgl. Meier und Keller, 1990):

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(u) e^{-i\omega u} du , \quad (4.11)$$

$$R(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{i\omega u} d\omega . \quad (4.12)$$

Die quadratische Spektraldichte, die im folgenden kurz als Spektrum bezeichnet wird, kann mit Hilfe von $x(t)$ ausgedrückt werden (vgl. Buttkus, 1991):

$$I(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 . \quad (4.13)$$

Abbildung 4.1 zeigt drei Realisierungen eines stationären Gauß-Prozesses $\Xi(t)$, für den $E[\Xi(t)] = 0$ und $\text{Var}[\Xi(t)] = 1$ gilt und dessen Autokovarianzfunktion vorgegeben ist durch $R(u) = \exp[-u^2/(2\tau^2)]$. Die Realisierungen werden mit einem Verfahren erzeugt, das in Anhang B näher beschrieben wird.

Gauß-Prozesse werden als Modelle für eine Vielzahl von Problemen benutzt. Zum einen kann man nach dem zentralen Grenzwertsatz davon ausgehen, daß ein Prozeß $\Xi(t)$, der unter dem Einfluß einer großen Zahl unabhängig voneinander wirkender zufälliger Faktoren vor sich geht, einer Normalverteilung entstammt. Zum anderen handelt es sich um Prozesse mit Nachwirkung, d. h. frühere Zustände des Prozesses beeinflussen die Wahrscheinlichkeiten seiner späteren Zustände. Dieser Einfluß spiegelt sich in der Autokovarianzfunktion wider.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von stationären Gauß-Prozessen ist, daß die lineare Transformation eines stationären Gauß-Prozesses wieder ein stationärer Gauß-Prozeß ist (siehe z. B. Bendat und Piersol, 1971). Für einen stationären Prozeß $\Xi(t)$ kann die Differentiation als Ableitung im quadratischen Mittel eingeführt werden (Meier und Keller, 1990). Ein stationärer Prozeß heißt im quadratischen Mittel differenzierbar, wenn ein Prozeß $\Xi'(t)$ existiert, so daß

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left[\left(\Xi'(t) - \frac{\Xi(t+h) - \Xi(t)}{h} \right)^2 \right] = 0 \quad (4.14)$$

gilt. $\Xi'(t)$ heißt Quadratmittelableitung von $\Xi(t)$. Die Quadratmittelableitung $\Xi'(t)$ eines Prozesses $\Xi(t)$ existiert genau dann, wenn die Autokovarianzfunktion $R_{\Xi}(u)$ des Prozesses $\Xi(t)$ zweimal differenzierbar ist. Für die Autokovarianzfunktion $R_{\Xi'}(u)$ der Quadratmittelableitung $\Xi'(t)$ gilt in diesem Fall

$$R_{\Xi'}(u) = -\frac{d^2}{du^2} R_{\Xi}(u) . \quad (4.15)$$

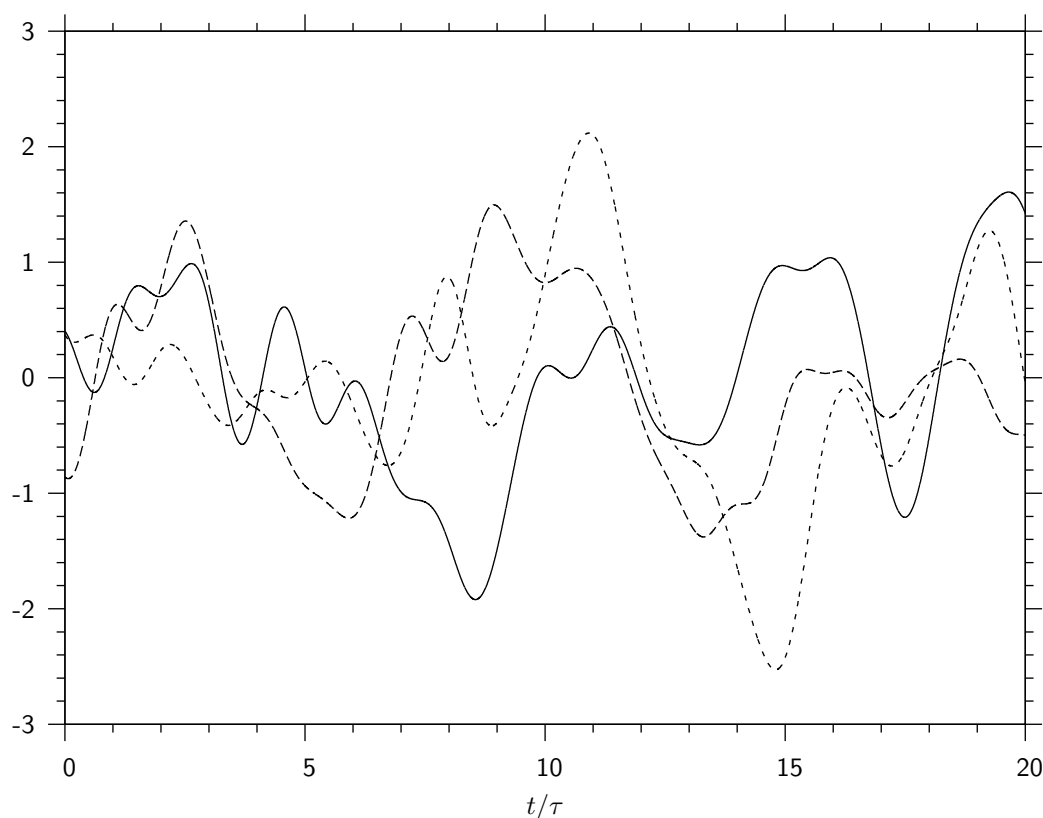


Abbildung 4.1: Dargestellt sind Ausschnitte aus drei Realisierungen $x(t)$ eines stationären Gauß-Prozesses $\Xi(t)$ mit dem Erwartungswert $E[\Xi(t)] = 0$ und der Autokovarianzfunktion $R(u) = \exp[-u^2/(2\tau^2)]$.

Im Zusammenhang mit dem Erdmagnetfeld und seiner zeitlichen Ableitung, der Säkularvariation, bedeutet Gleichung (4.15), daß aus der Autokovarianzfunktion des Erdmagnetfeldes die Autokovarianzfunktion der Säkularvariation folgt, wenn man das Feld als stationären Gauß-Prozeß auffaßt.

4.2 Das Erdmagnetfeld als stationärer Gauß-Prozeß

Wird das Erdmagnetfeld an der Erdoberfläche durch die Gauß-Koeffizienten g_n^m und h_n^m bis zum Grad N dargestellt, so ist das Erdmagnetfeld ein $(N^2 + 2N)$ -dimensionaler stationärer Gauß-Prozeß, wenn man davon ausgeht, daß die Gauß-Koeffizienten voneinander unabhängig sind und daß jeder einzelne Gauß-Koeffizient als Gauß-Prozeß aufgefaßt werden kann. Diese Annahme bedeutet, daß jeder Gauß-Koeffizient zu einem festen Zeitpunkt t aus einer Normalverteilung stammt, wobei die Parameter der Normalverteilung selbst nicht vom Zeitpunkt t abhängen, und daß jeder Gauß-Koeffizient in einem gewissen Maß von früheren Zuständen abhängt.

Im folgenden sind Beispiele für die Behandlung des Erdmagnetfeldes als Gauß-Prozeß aufgeführt. Die Untersuchungen zielen meist auf lange Zeitskalen ab, etwa im Zusammenhang mit paläomagnetischen Arbeiten. Außerdem wird bei allen Beispielen die elektrische

Leitfähigkeit des Erdmantels vernachlässigt – eine durchaus sinnvolle Annahme angesichts der auftretenden großen Korrelationszeiten. Die Korrelationszeiten beziehen sich genau genommen auf das Magnetfeld an der Erdoberfläche und gelten nur dann in guter Näherung auch für das Magnetfeld an der Kern-Mantel-Grenze, wenn sie verglichen mit den Zeitkonstanten des Erdmantels, insbesondere der Glättungszeit $\tau_s(n)$, groß sind.

Constable und Parker (1988) stellen ein statistisches Modell vor, das auf einfachen Annahmen basiert und bei dem alle Gauß-Koeffizienten aus Normalverteilungen stammen. Abgesehen von den zonalen Dipol- und Quadrupolkoeffizienten soll für alle Koeffizienten

$$E[g_n^m] = E[h_n^m] = 0 \quad (4.16)$$

gelten. Der dominierende Dipolkoeffizient g_1^0 stammt in diesem Modell aus einer Verteilung, die durch die Kombination zweier Gauß-Verteilungen beschrieben wird, deren Zentren in der Nähe des heutigen Betrages von g_1^0 mit positivem und negativem Vorzeichen liegen. Der Erwartungswert des Quadrupolkoeffizienten g_2^0 ist über $E[g_2^0] = 0.06 E[g_1^0]$ an den dominierenden Dipolkoeffizienten gekoppelt.

Die Standardabweichungen für $n > 1$ sollen nur vom Grad n abhängen, so daß

$$\text{Var}[g_n^m] = \text{Var}[h_n^m] = E[(g_n^m)^2] = E[(h_n^m)^2] = \sigma_n^2 \quad (4.17)$$

gilt, wobei an dieser Stelle vereinfachend auch $E[g_2^0] = 0$ angenommen wird. Den Wert von σ_n leiten Constable und Parker (1988) aus den Annahmen ab, daß die Gauß-Koeffizienten einem räumlich weißen Spektrum an der Kern-Mantel-Grenze entsprechen und daß für das Mauersberger-Lowes-Spektrum

$$M_n = (n+1) \sum_{m=0}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2] \quad (4.18)$$

der Erwartungswert nicht vom Zeitpunkt t abhängt. Dann gilt

$$E[M_n] = (n+1) \sum_{m=0}^n \{E[(g_n^m)^2] + E[(h_n^m)^2]\} = \left(\frac{c}{a}\right)^{2n+4} \alpha^2 \text{ für } n > 1, \quad (4.19)$$

wobei die Konstante α beispielsweise aus dem IGRF gewonnen werden kann. M_n ist die Summe von $2n+1$ Quadraten von normalverteilten Zufallsvariablen und damit selbst χ^2 -verteilt mit $2n+1$ Freiheitsgraden. Aus Gleichung (4.19) folgt mit Gleichung (4.17)

$$\sigma_n^2 = \frac{\alpha^2}{(n+1)(2n+1)} \left(\frac{c}{a}\right)^{2n+4} \text{ für } n > 1. \quad (4.20)$$

Für $n = 1$ wählen Constable und Parker (1988) $\sigma_1 = 3.0 \mu\text{T}$. Das ist eine kleinere Standardabweichung, als sie aus Gleichung (4.20) folgen würde. Somit wird das statistische Modell für das Erdmagnetfeld mit den vier Parametern $E[g_1^0] = \pm 30 \mu\text{T}$, $E[g_2^0] = 0.06 E[g_1^0]$, $\sigma_1 = 3.0 \mu\text{T}$ und $\alpha = 92.8 \mu\text{T}$ festgelegt. Nimmt man vereinfachend auch $E[g_2^0] = 0$ an, dann ist der Nichtdipolanteil des Modells allein durch den Parameter α bestimmt (siehe auch Abschnitt 5.4.2). Walker und Backus (1997) beschreiben ein verfeinertes statistisches Modell für $2 \leq n \leq 50$ mit sechs Parametern, die sie durch eine Anpassung an Magsat-Daten gewinnen.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n [a]	666	150	133	118	105	93	83	73	65	51

Tabelle 4.1: Typische Korrelationszeiten u_n für die Autokovarianzfunktion $R(u)$ in Gleichung (4.21) nach Hongre et al. (1998)

Die oben vorgestellten statistischen Modelle gelten für einen festen Zeitpunkt t . Für einen stationären Gauß-Prozeß fehlen Aussagen über den Zusammenhang mit früheren Zuständen, also die Autokovarianzfunktionen für die Gauß-Koeffizienten. Für die Autokovarianzfunktionen der Gauß-Koeffizienten gibt es in der Literatur verschiedene Ansätze. Allen Ansätzen ist gemeinsam, daß die Autokovarianzfunktion außer von der Zeitdifferenz u nur vom Grad n abhängt. Hongre et al. (1998) wählen als Ansatz für die Autokovarianzfunktion

$$R_n(u) = \sigma_n^2 \exp[-(u/u_n)^2/2] , \quad (4.21)$$

mit dem Parameter u_n , der vom Grad n abhängt und als typische Korrelationszeit aufgefaßt werden kann. Sie verwenden archäomagnetische Daten, aus denen sie an neun Orten in Abständen von 25 Jahren Werte entnehmen, wobei der gesamte Zeitraum 2000 Jahre umfaßt. Ihre Ergebnisse für die Werte von u_n sind in Tabelle 4.1 zusammengefaßt.

Zu vergleichbaren Ergebnissen kommen auch Hulot und Le Mouél (1994), deren Ansatz für die Autokovarianzfunktion der Entwicklung von Gleichung (4.21) bis zum ersten von u abhängigen Term entspricht:

$$R_n(u) = \sigma_n^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{u_n} \right)^2 \right] . \quad (4.22)$$

Die typischen Korrelationszeiten u_n schätzen sie aus der Annahme ab, daß

$$u_n = \sqrt{\frac{M_n}{M_n^{\text{SV}}}} \quad (4.23)$$

gilt, wobei M_n aus Gleichung (4.18) stammt, und

$$M_n^{\text{SV}} = (n+1) \sum_{m=0}^n \left[(\dot{g}_n^m)^2 + (\dot{h}_n^m)^2 \right] \quad (4.24)$$

ist. Der Index SV steht für Säkularvariation. Aus dieser Betrachtung erhält man für die typischen Korrelationszeiten u_n Werte im Bereich zwischen 100 und 200 Jahren. Da der Grad n in der Kugelfunktionsentwicklung auch eine Längenskala festlegt, stellt Gleichung (4.23) einen Zusammenhang zwischen dem zeitlichen und räumlichen Spektrum des Erdmagnetfeldes her.

Einen anderen Ansatz verwendet McLeod (1996), der ebenfalls auf den Zusammenhang zwischen dem zeitlichen und dem räumlichen Spektrum verweist. Für das Spektrum des Erdmagnetfeldes wählt er einen Ansatz der Form

$$I(\omega) = \frac{2s_n}{[1 + (b_n \omega)^2] [1 + (c_n \omega)^2]} \quad (4.25)$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n [a]	4444	1600	816	494	331	237	178	138	111	91
c_n [a]	444	160	82	49	33	24	18	14	11	9

Tabelle 4.2: Typische Korrelationszeiten b_n des Erdmagnetfeldes und c_n der Säkularvariation nach McLeod (1996)

mit den vom Grad n abhängigen Konstanten s_n , b_n und c_n . Die zugehörige Autokovarianzfunktion der Gauß-Koeffizienten ist

$$R(u) = \frac{s_n}{b_n^2 - c_n^2} \left(b_n e^{-|u|/b_n} - c_n e^{-|u|/c_n} \right). \quad (4.26)$$

Für die Säkularvariation folgt dann aus Gleichung (4.15) die Beziehung

$$R_{sv}(u) = \frac{s_n}{b_n^3 c_n - b_n c_n^3} \left(-\frac{1}{b_n} e^{-|u|/b_n} + \frac{1}{c_n} e^{-|u|/c_n} \right), \quad (4.27)$$

weil sie die zeitliche Ableitung des Erdmagnetfeldes ist. Für $b_n \gg c_n$ dominiert in Gleichung (4.26) der Term $b_n e^{-|u|/b_n}$ und in Gleichung (4.27) der Term $(1/c_n) e^{-|u|/c_n}$. McLeod (1996) geht davon aus, daß b_n ungefähr der typischen Korrelationszeit des Erdmagnetfeldes, d. h. der Gauß-Koeffizienten, und c_n ungefähr der typischen Korrelationszeit der Säkularvariation entspricht. Für die typischen Korrelationszeiten gibt McLeod (1996) die Formeln

$$b_n = \frac{10^4 \text{ a}}{(n + 1/2)^2} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{10^3 \text{ a}}{(n + 1/2)^2} \quad (4.28)$$

an, Werte bis zum Grad $n = 10$ sind in Tabelle 4.2 angegeben. McLeod (1996) selbst verwendet die Grade $1 \leq n \leq 9$. Er erweitert außerdem das Modell um die Säkularbeschleunigung, indem er in Gleichung (4.25) dem Nenner den Faktor $[1 + (d_n \omega)^2]$ hinzufügt. Die typische Korrelationszeit für die Säkularbeschleunigung schätzt er für $1 \leq n \leq 9$ auf $d_n = 5 \text{ a}$, wobei die Schätzung im wesentlichen auf den Graden $n = 2$ und $n = 3$ basiert.

Auch De Santis et al. (2003) gehen auf die Verknüpfung zwischen räumlichem und zeitlichem Spektrum ein. Sie zerlegen das Erdmagnetfeld \mathbf{B}_t (der Index t steht bei ihnen für *total geomagnetic field*) in einen konstanten Anteil \mathbf{B}_0 und einen zeitlich variierenden Anteil \mathbf{B} und betrachten nur einen Ausschnitt des zeitlichen Spektrums, für den sie die Perioden ω_n abschätzen, die abhängig vom Grad n die meiste Energie zum Spektrum beitragen. Die entsprechenden Perioden T_n liegen zwischen 6859 Jahren für $n = 1$ und 94 Jahren für $n = 10$, wenn \mathbf{B}_t zugrunde gelegt wird, und zwischen 318 Jahren für $n = 1$ und 23 Jahren für $n = 10$, wenn nur der variable Anteil \mathbf{B} verwendet wird.

Die vorgestellten Beispiele, die das Erdmagnetfeld an der Erdoberfläche als stationären Gauß-Prozeß betrachten, kommen zu typischen Korrelationszeiten des Erdmagnetfeldes, die im Bereich zwischen Dekaden und Jahrtausenden liegen. Die Zeitkonstanten der Modelle S und SD sind deutlich kleiner. Die Glättungszeiten $\tau_s(n)$ der radialen Komponente erreichen selbst bei Modell SD für $n = 1$ maximal 2 Jahre (Tabelle 3.1b). Der Vergleich der Zeitkonstanten mit den Korrelationszeiten, läßt erwarten, daß der Mantel das Erdmagnetfeld an der Erdoberfläche nicht wesentlich beeinflussen kann. Dieser Vergleich

rechtfertigt die Annahme eines nichtleitenden Mantels, so daß sich die Spektren des Magnetfeldes allein unter Berücksichtigung der geometrischen Abschwächung von der Erdoberfläche an die Kern-Mantel-Grenze übertragen lassen. Etwas anders ist die Situation, wenn man nicht die Korrelationszeiten des Feldes, sondern die der Säkularvariation oder der Säkularbeschleunigung betrachtet, die teilweise nur wenige Jahre betragen. Für sie ist ein gewisser Einfluß des Mantels denkbar. Die Diffusions- und Glättungszeiten können hier ebenfalls zum Vergleich herangezogen werden, weil sich ihre Herleitung auf dB/dt und d^2B/dt^2 übertragen läßt. Die aufgeführten Arbeiten wählen zudem einfache Ansätze für die Autokovarianzfunktion bzw. das Spektrum des Erdmagnetfeldes. Es ist durchaus denkbar, daß diese Modelle höhere Frequenzen nicht angemessen beschreiben. Denkbar ist beispielsweise, daß schnelle Magnetfeldänderungen dem eigentlichen Magnetfeld gewissermaßen als Rauschen, das selbst als Gauß-Prozeß modelliert werden kann, überlagert sind. Die Beobachtung kleiner Änderungen des internen Magnetfeldes bei kleinen Perioden ist sehr schwer, weil sie durch Magnetfelder externen Ursprungs überlagert werden. Als Indiz dafür, daß Änderungen auf relativ kurzen Zeitskalen tatsächlich möglich sind, können die Jerks angeführt werden, die in einem Zeitraum von etwa einem Jahr ablaufen (Nagao et al., 2003).

Die Ideen, die den vorgestellten statistischen Modellen für das Magnetfeld an der Erdoberfläche zugrundeliegen, werden im Abschnitt 4.4 und Abschnitt 5.4 aufgegriffen, um Modelle für das Feld an der Kern-Mantel-Grenze zu entwickeln.

4.3 Fortsetzung der Gauß-Prozesse durch den Mantel

Im folgenden werden stationäre Gauß-Prozesse $\Xi(t)$ als Modelle des zeitlichen Verlaufs der Gauß-Koeffizienten $G_n^m(t)$ und $H_n^m(t)$ der radialen Magnetfeldkomponente an der Kern-Mantel-Grenze verwendet. Diese stationären Gauß-Prozesse dienen als Eingangssignale, die durch den Erdmantel als linearen Filter in Ausgangssignale, nämlich die Gauß-Koeffizienten $g_n^m(t)$ und $h_n^m(t)$ an der Erdoberfläche, transformiert werden. Da es sich um eine lineare Transformation handelt, ist das Ausgangssignal wieder ein stationärer Gauß-Prozeß. Der Einfluß des Mantels tritt durch die unterschiedlichen Eigenschaften der Gauß-Prozesse an der Kern-Mantel-Grenze und der Erdoberfläche in Erscheinung.

Es eröffnen sich zwei Möglichkeiten, den Einfluß des elektrisch leitenden Mantels zu untersuchen. Die erste Vorgehensweise besteht darin, Realisierungen des Gauß-Prozesses $\Xi(t)$ zu betrachten. Bereits in Kapitel 2 wurde gezeigt, wie für die vorgegebene radiale Magnetfeldkomponente $B_r(c, t)$ an der Kern-Mantel-Grenze als Funktion der Zeit die radiale Magnetfeldkomponente $B_r(a, t)$ an der Erdoberfläche berechnet werden kann. Mit stationären Gauß-Prozessen kann man prinzipiell genauso verfahren, indem man eine Realisierung des Eingangssignals $x(t)$ an der Kern-Mantel-Grenze vorgibt, und das Ausgangssignal $y(t)$ berechnet. Abbildung 4.2 zeigt schematisch die Berechnung im Zeit- und Frequenzbereich. Dabei verwendet man die einfach auszuführende Multiplikation im Frequenzbereich. Man berechnet zunächst die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ des Eingangssignals $x(t)$ und bildet dann das Produkt mit der Übertragungsfunktion $\Gamma(\omega)$, um die Fourier-Transformierte des Ausgangssignals $Y(\omega)$ zu erhalten:

$$Y(\omega) = \Gamma(\omega) X(\omega) . \quad (4.29)$$

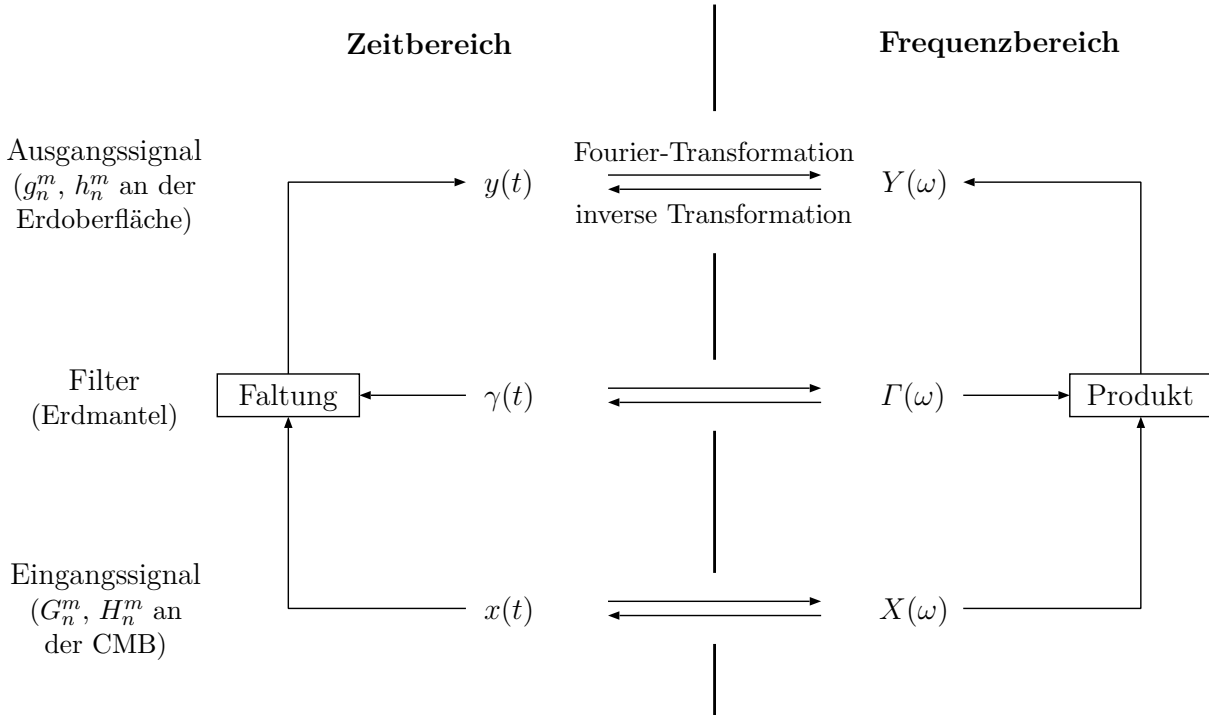


Abbildung 4.2: Filterung determinierter Prozesse (oder auch der Realisierung eines stationären Gauß-Prozesses) im Zeit- und Frequenzbereich (Buttkus, 1991)

Schließlich gewinnt man das Ausgangssignal $y(t)$ durch die inverse Fourier-Transformation von $Y(\omega)$.

Für stationäre stochastische Prozesse $\Xi(t)$ steht eine alternative Methode zur Verfügung, bei der nicht die Realisierung des Prozesses, sondern die Autokovarianzfunktion des Prozesses betrachtet wird. Bezeichnet $R_x(u)$ die Autokovarianzfunktion des Eingangssignals, dann läßt sich mit Hilfe der Impulsantwortfunktion $\gamma(t)$ des Filters die Autokovarianzfunktion des Ausgangssignals $R_y(u)$ durch eine zweifache Faltung ermitteln (z. B. Blackman und Tukey, 1958):

$$R_y(u) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \gamma(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \gamma(\eta) R_x(u + \lambda - \eta) . \quad (4.30)$$

Im Frequenzbereich kann aus dem Eingangs-Spektrum $I_x(\omega)$ an der Kern-Mantel-Grenze und der Übertragungsfunktion $\Gamma(\omega)$ das Ausgangs-Spektrum $I_y(\omega)$ an der Erdoberfläche berechnet werden:

$$I_y(\omega) = |\Gamma(\omega)|^2 I_x(\omega) . \quad (4.31)$$

Die Vorgehensweisen im Zeit- und Frequenzbereich stellt Abbildung 4.3 einander gegenüber. Diese Möglichkeit nutzt beispielsweise Currie (1968), der bereits $|\Gamma_n(\omega)|^2$ verwendet, um die Spektren des Magnetfeldes an der Kern-Mantel-Grenze und der Erdoberfläche miteinander zu verknüpfen, vgl. Gleichung (4.31).

Der Vergleich der Abbildungen 4.2 und 4.3 bzw. der Gleichungen (4.29) und (4.31) verdeutlicht den Unterschied zwischen der Berechnung des Ausgangssignals für eine Realisie-

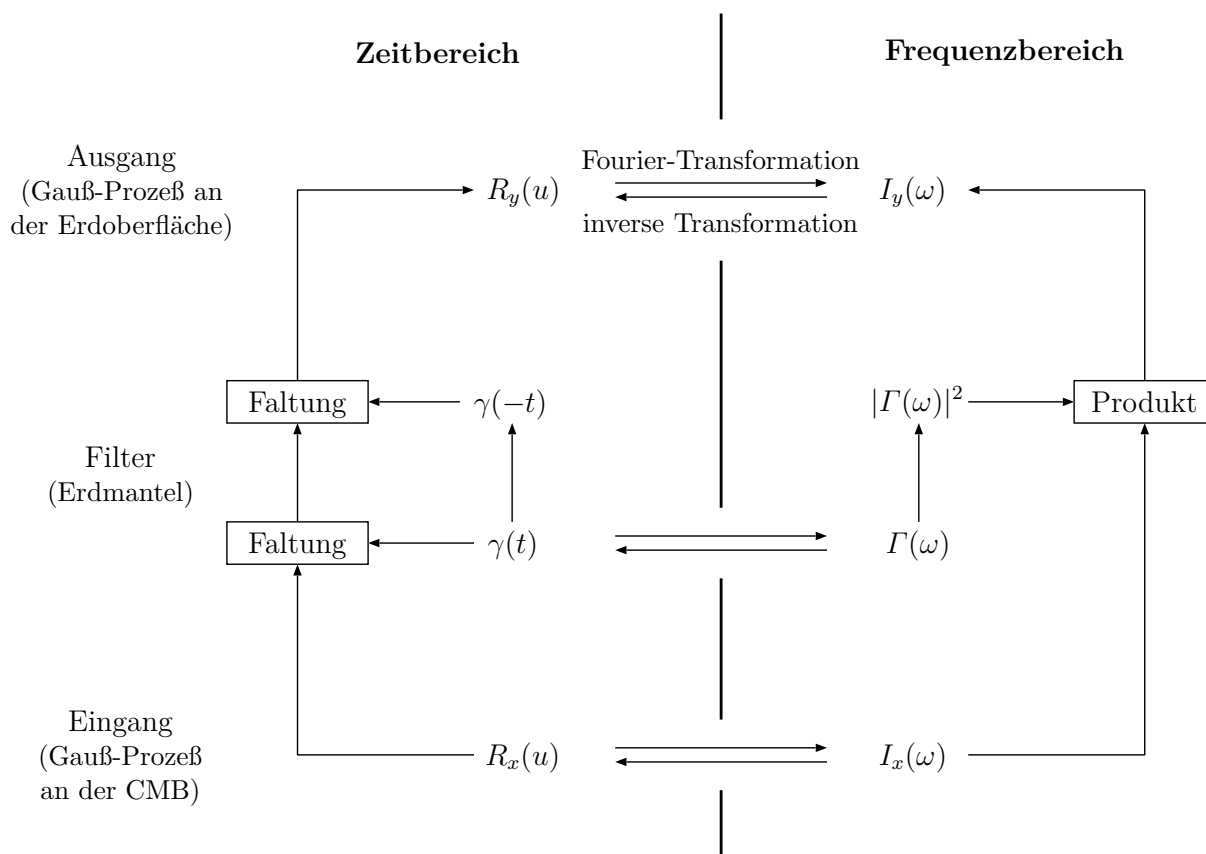


Abbildung 4.3: Filterung stationärer stochastischer Prozesse unter Verwendung der Autokovarianzfunktionen $R_x(u)$ und $R_y(u)$ im Zeitbereich bzw. der Spektren $I_x(\omega)$ und $I_y(\omega)$ im Frequenzbereich (Buttkus, 1991)

ung des stationären Gauß-Prozesses und der Untersuchung des Spektrums des Prozesses selbst. Im ersten Fall wird im Frequenzbereich das Produkt mit $\Gamma(\omega)$ gebildet, im zweiten das Produkt mit $|\Gamma(\omega)|^2$. Durch die Betragsbildung gehen allerdings die Informationen über die Phasenbeziehungen verloren.

Die Möglichkeit, mit der Übertragungsfunktion $\Gamma(\omega)$ aus dem Spektrum $I_x(\omega)$ an der Kern-Mantel-Grenze das Spektrum $I_y(\omega)$ an der Erdoberfläche zu bestimmen, spielt in Kapitel 5 eine wichtige Rolle.

4.4 Einfluß des Mantels auf das Spektrum an der Erdoberfläche

Der elektrisch leitende Mantel dämpft hohe Frequenzen stärker als niedrige (vgl. Abbildungen 2.8a). Daher ist das zeitliche Spektrum an der Erdoberfläche im Vergleich zum Spektrum an der Kern-Mantel-Grenze stärker zu niedrigen Frequenzen verschoben. In den folgenden Abschnitten soll dies an zwei einfachen Beispielen veranschaulicht werden. Zunächst wird ein weißes Spektrum an der Kern-Mantel-Grenze angenommen und mit

Hilfe der Übertragungsfunktion aus Abschnitt 2.8.3 das Spektrum an der Erdoberfläche ermittelt. Anschließend wird ein rotes Spektrum an der Kern-Mantel-Grenze verwendet, das mit wachsendem Betrag der Frequenz monoton abnimmt.

4.4.1 Weißes Magnetfeldspektrum an der Kern-Mantel-Grenze

An der Kern-Mantel-Grenze wird häufig ein räumlich annähernd weißes Spektrum angenommen, bei dem die Energie des magnetischen Feldes auf der Kugelschale mit dem Radius $r = c$ gleichmäßig auf alle Grade der Multipolentwicklung verteilt ist: die Werte des Mauersberger-Lowes-Spektrums M_n für das Feld an der Kern-Mantel-Grenze liegen ungefähr auf einer Geraden, die parallel zur Abszisse verläuft. Nimmt man an, daß räumliches und zeitliches Spektrum gewisse Parallelen aufweisen, dann ist es naheliegend, zunächst ein zeitlich weißes Spektrum des Magnetfeldes an der Kern-Mantel-Grenze anzunehmen und die Frage zu stellen, wie das zeitliche Spektrum an der Erdoberfläche vom elektrisch leitenden Mantel beeinflusst wird. Durch ein weißes Spektrum wird zwar kein Prozeß beschrieben, weil das zugehörige Erdmagnetfeld an der Kern-Mantel-Grenze zu keiner Zeit von früheren Zuständen abhängt, aber an der Erdoberfläche erhält man aufgrund der glättenden Wirkung des Mantels einen stationären Prozeß, bei dem das Magnetfeld von den früheren Zuständen abhängt. Die Antwort an der Erdoberfläche kann unmittelbar an Gleichung (4.31) abgelesen werden, vgl. auch die rechte Seite der Abbildungen 4.3. Für das zeitlich weiße Spektrum an der Kern-Mantel-Grenze kann man

$$I_x(\omega) = \sigma_x^2 \Delta t \quad (4.32)$$

mit der zugehörigen Autokovarianzfunktion

$$R_x(u) = \sigma_x^2 \Delta t \delta(u) \quad (4.33)$$

ansetzen, wobei die Konstanten σ_x und Δt die Einheit der magnetischen Flußdichte bzw. der Zeit haben. Die Annahme eines weißen Spektrums bedeutet, daß die Gauß-Koeffizienten an der Kern-Mantel-Grenze zeitlich unkorreliert sind, die Autokovarianzfunktion ist eine δ -Funktion. Gleichung (4.31) liefert dann das Spektrum abhängig von betrachteten Grad n

$$I_y(\omega) = |\Gamma_n(\omega)|^2 \sigma_x^2 \Delta t \quad (4.34)$$

an der Erdoberfläche. In diesem Spezialfall entsteht die Abhängigkeit des Spektrums von der Kreisfrequenz ω überhaupt erst durch den Einfluß des elektrisch leitenden Erdmantels. Da die Übertragungsfunktion $\Gamma_n(\omega)$ auch den Faktor $(c/a)^{(n+2)}$ der geometrischen Abschwächung enthält, ist es sinnvoll, die Hilfsfunktion

$$F_n(\omega) = \left(\frac{a}{c}\right)^{2n+4} |\Gamma_n(\omega)|^2 \quad (4.35)$$

mit der Eigenschaft $F_n(0) = 1$ einzuführen, weil sie die elektromagnetische Dämpfung durch den elektrisch leitenden Mantel beschreibt. Damit läßt sich Gleichung (4.34) schreiben als

$$I_y(\omega) = \left(\frac{c}{a}\right)^{2n+4} F_n(\omega) \sigma_x^2 \Delta t \quad (4.36)$$

Das Spektrum an der Erdoberfläche wird in diesem einfachen Fall bestimmt durch die nur vom Grad n abhängige geometrische Abschwächung, durch die vom Grad n und der Frequenz ω abhängige elektromagnetische Dämpfung und durch das zeitlich invariante Spektrum an der Kern-Mantel-Grenze. Abbildung 4.4 zeigt die Funktion $F_n(\omega)$ für die Grade $n = 1, 2, 5$ und 10 zusammen mit einer Näherung, die man unmittelbar aus der Backusschen Näherung, vgl. Gleichung (3.22), erhält:

$$\tilde{F}_n(\omega) = \left(\frac{c}{a}\right)^{n+2} \exp \left\{ -i \tau_d(n) \omega - \frac{1}{2} [\tau_s(n) \omega]^2 \right\} .$$

Damit erhält man für $F_n(\omega)$ die Näherung

$$\tilde{F}_n(\omega) = \exp \left\{ -[\tau_s(n) \omega]^2 \right\} , \quad (4.37)$$

in der nur noch die Glättungszeit $\tau_s(n)$ auftritt. Durch die Bildung des Betragsquadrats in Gleichung (4.35) entfallen in der Backusschen Entwicklung der Übertragungsfunktion im Exponenten alle Terme mit ungeraden Potenzen von ω , insbesondere entfällt damit die Abhängigkeit von $\tau_d(n)$. Diese Näherung gilt für kleine Frequenzen ω . Für große Frequenzen überschätzt die Näherung, die in Gleichung (4.37) gemacht wird, die Dämpfung durch den elektrisch leitenden Mantel, vgl. Abbildung 4.4. Sowohl für $F_n(\omega)$ als auch für $\tilde{F}_n(\omega)$ gilt, daß sie monoton mit der Frequenz ω fallen, wobei die Abnahme um so langsamer ausfällt, je höher der Grad n ist. Für die Näherung $\tilde{F}_n(\omega)$ erklärt sich dies daraus, daß die Glättungszeit $\tau_s(n)$ mit wachsendem Grad n kleiner wird (vgl. Abschnitt 3.4). Für das Spektrum an der Erdoberfläche erhält man damit die Näherung

$$\tilde{I}_y(\omega) = \left(\frac{c}{a}\right)^{2n+4} \exp \left\{ -[\tau_s(n) \omega]^2 \right\} \sigma_x^2 \Delta t . \quad (4.38)$$

Für die Autokovarianzfunktion $R_y(u)$ der Gauß-Koeffizienten an der Erdoberfläche folgt aus Gleichung (4.36)

$$R_y(u) = \left(\frac{c}{a}\right)^{2n+4} f_n(u) \sigma_x^2 \Delta t , \quad (4.39)$$

wobei

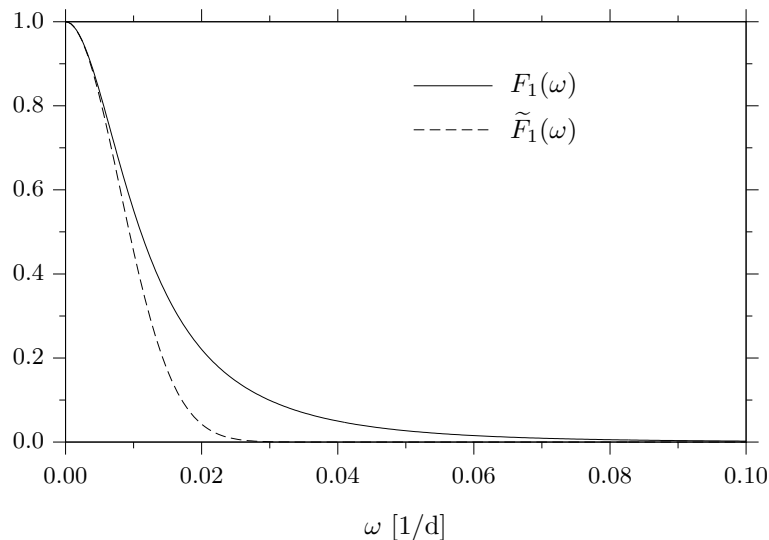
$$f_n(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\omega) e^{i\omega u} d\omega \quad (4.40)$$

die inverse Fourier-Transformierte von $F_n(\omega)$ ist, für die aus $F_n(0) = 1$

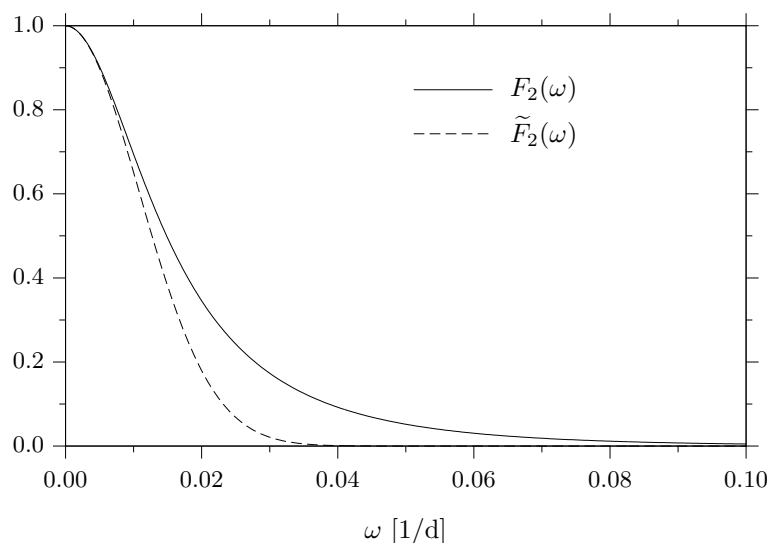
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(u) du = 1 \quad (4.41)$$

folgt. Abbildung 4.5 zeigt die Funktion $f_n(u)$ zusammen mit der inversen Fourier-Transformierten $\tilde{f}_n(u)$ der Näherung $\tilde{F}_n(\omega)$, vgl. Gleichung (4.37),

$$\tilde{f}_n(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_n(\omega) e^{i\omega u} d\omega = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\tau_s(n)} \exp \left\{ - \left[\frac{u}{2\tau_s(n)} \right]^2 \right\} . \quad (4.42)$$

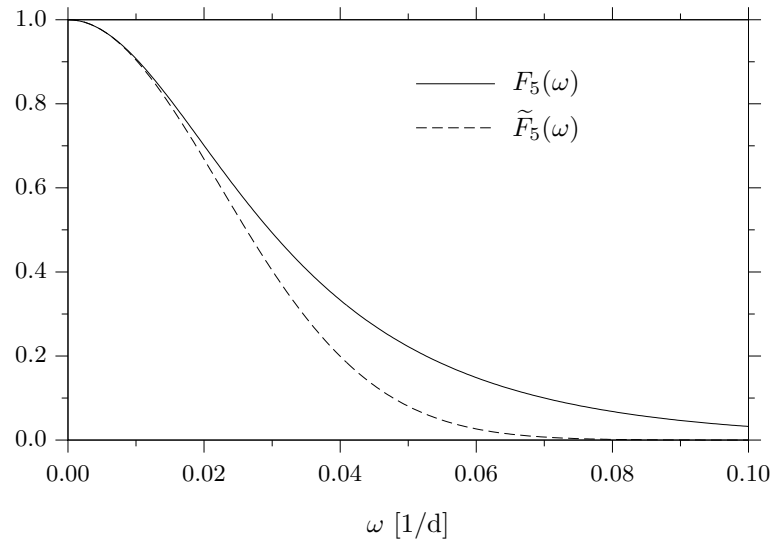


(a) Grad $n = 1$

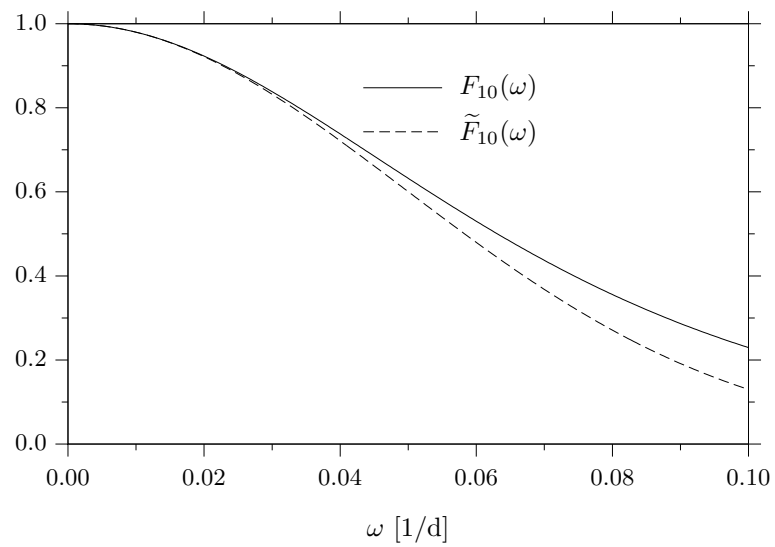


(b) Grad $n = 2$

Abbildung 4.4: Die Funktion $F_n(\omega) = (a/c)^{(2n+4)}|\Gamma_n(\omega)|^2$ beschreibt bis auf frequenzunabhängige Faktoren das Spektrum an der Erdoberfläche, wenn man an der Kern-Mantel-Grenze ein weißes Spektrum annimmt. $F_n(\omega)$ ist monoton fallend und dämpft hohe Frequenzen. Sie fällt langsamer ab als die Näherung $\tilde{F}_n(\omega) = \exp\{-[\tau_s(n)\omega]^2\}$, die aus der Entwicklung der Übertragungsfunktion für niedrige Frequenzen folgt, siehe Text. Die Abnahme von $F_n(\omega)$ bzw. $\tilde{F}_n(\omega)$ mit der Frequenz ω ist für niedrige Grade n stärker als für höhere Grade. Dargestellt sind $F_n(\omega)$ und $\tilde{F}_n(\omega)$ für die Grade $n = 1, 2, 5$ und 10 . (Abbildung wird fortgesetzt.)



(c) Grad $n = 5$



(d) Grad $n = 10$

Abbildung 4.4: (Fortsetzung)

Auch für \tilde{f}_n gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n(u) du = 1. \quad (4.43)$$

Für die Autokovarianzfunktion $R_y(u)$ folgt daraus die Näherung

$$\tilde{R}_y(u) = \left(\frac{c}{a}\right)^{2n+4} \tilde{f}_n(u) \sigma_x^2 \Delta t. \quad (4.44)$$

Die Abhängigkeit von der Zeitdifferenz u der Autokovarianzfunktionen $R_y(u)$ und $\tilde{R}_y(u)$ wird durch die Funktionen $f_n(u)$ bzw. $\tilde{f}_n(u)$ beschrieben, wobei die Flächen unter diesen Kurven nach den Gleichungen (4.41) und (4.43) gleich Eins sind. Je kleiner der betrachtete Grad n ist, desto flacher sind die Autokovarianzfunktionen und desto stärker ist die Korrelation für große u . Abbildung 4.5 zeigt, daß für die Varianzen $\tilde{R}_y(0) < R_y(0)$ gilt, und außerdem, daß $\tilde{R}_y(u)$ langsamer mit u abfällt als $R_y(u)$. Damit schätzt die Näherung $\tilde{R}_y(u)$ die Dämpfung in zwei Aspekten nicht genau ein. Erstens ist die Varianz für die Näherung zu klein, d. h. die quadratischen Abweichungen von Null fallen im Mittel niedriger aus, vergleichbar mit einer geringeren Amplitude bei harmonischer Anregung. Zweitens liefert die Näherung eine zu große Korrelation für große u , so daß der jeweilige Zustand stärker von früheren Zuständen beeinflusst erscheint.

Die Annahme eines weißen Spektrums ist, wenn man die Energie betrachtet, unphysikalisch. Es ist nicht zu erwarten, daß im Frequenzspektrum des Magnetfeldes im Kern sehr hohe Frequenzen genauso stark enthalten sind wie niedrige. Realistischer ist ein Spektrum, das zu hohen Frequenzen hin abfällt.

4.4.2 Rotes Magnetfeldspektrum an der Kern-Mantel-Grenze

Im roten Spektrum sind hohe Frequenzen schwächer vertreten als niedrige, und für $\omega \rightarrow \infty$ fällt es auf Null ab. In Analogie zum sichtbaren Licht, das rötlich erscheint, wenn niedrige Frequenzen dominieren, wird es als rotes Spektrum bezeichnet. Buttkus (1991) erwähnt als einfaches Beispiel für ein rotes Spektrum

$$I_x(\omega) = \sqrt{2\pi} \sigma_x^2 \tau_x \exp\left(-\frac{\tau_x^2 \omega^2}{2}\right), \quad (4.45)$$

mit der zugehörigen Autokovarianzfunktion

$$R_x(u) = \sigma_x^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2\tau_x^2}\right), \quad (4.46)$$

wobei τ_x die typische Korrelationszeit ist. Dieser Ansatz ist identisch mit dem von Hongre et al. (1998), siehe auch Gleichung (4.21). Setzt man Gleichung (4.45) und Näherung (4.37) in Gleichung (4.31) ein, dann erhält man an der Erdoberfläche das Spektrum

$$\tilde{I}_y(\omega) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{c}{a}\right)^{2n+4} \sigma_x^2 \tau_x \exp\left\{-\frac{\omega^2}{2} [\tau_x^2 + 2\tau_s^2(n)]\right\}, \quad (4.47)$$

das selbst ein rotes Spektrum ist, und die zugehörige Autokovarianzfunktion

$$\tilde{R}_y(u) = \left(\frac{c}{a}\right)^{2n+4} \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{1 + 2 [\tau_s(n)/\tau_x]^2}} \exp \left\{ -\frac{u^2}{2[\tau_x^2 + 2\tau_s^2(n)]} \right\}. \quad (4.48)$$

Dies entspricht dem Vorgehen, wie es in Abbildung 4.3 skizziert ist. Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem Ansatz für die Autokovarianzfunktion

$$\tilde{R}_y(u) = \sigma_y^2 \exp \left(-\frac{u^2}{2\tau_y^2} \right) \quad (4.49)$$

für rotes Rauschen an der Erdoberfläche, dann erhält man für die Varianz

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^{2n+4} \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{1 + 2 [\tau_s(n)/\tau_x]^2}} \quad (4.50)$$

und für die typische Korrelationszeit

$$\tau_y = \sqrt{\tau_x^2 + 2\tau_s^2(n)} = \tau_x \sqrt{1 + 2 [\tau_s(n)/\tau_x]^2}. \quad (4.51)$$

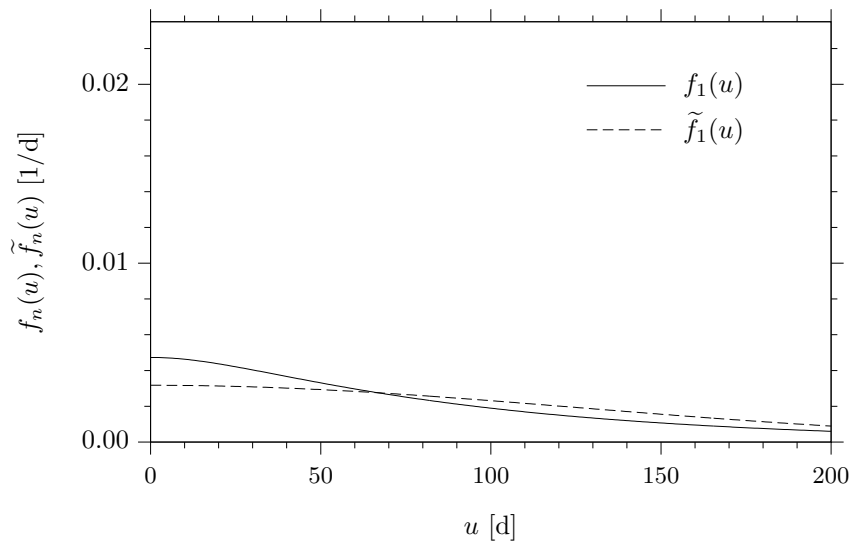
Diese Gleichungen enthalten auch den Spezialfall des nichtleitenden Mantels, für den $\tau_s(n) = 0$ gilt. Dann sind

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^{2n+4} \sigma_x^2 \quad \text{und} \quad \tau_y = \tau_x. \quad (4.52)$$

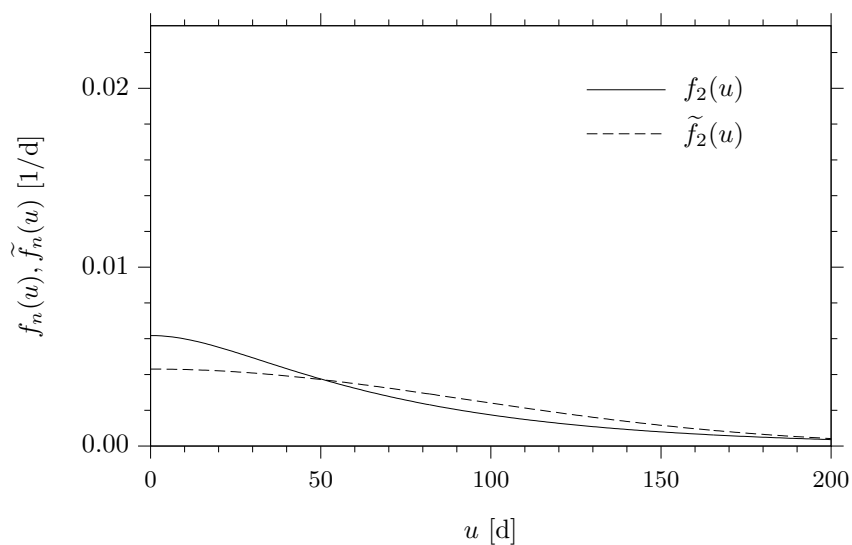
In diesem Fall sind die typischen Korrelationszeiten τ_y und τ_x gleich, und die Varianz σ_y^2 an der Erdoberfläche ist gleich der mit der quadrierten geometrischen Abschwächung multiplizierten Varianz σ_x^2 an der Kern-Mantel-Grenze.

Wenn der Mantel elektrisch leitend ist, dann ist die Glättungszeit $\tau_s(n)$ von Null verschieden, und es gelten die Gleichungen (4.50) und (4.51). Je größer das Verhältnis von Glättungszeit $\tau_s(n)$ zur typischen Korrelationszeit τ_x an der Kern-Mantel-Grenze ist, desto kleiner ist die Varianz σ_y^2 und desto größer ist das Verhältnis τ_y/τ_x . Dabei entsprechen eine kleinere Varianz und eine größere typische Korrelationszeit einer stärkeren Dämpfung und Glättung. Die verringerte Varianz führt zwar zu kleineren Schwankungen, aber nicht zu einem stärkeren Verlaufen des Signals. Nur durch die vergrößerte typische Korrelationszeit τ_y kommt es zu einer stärkeren Mittelung, durch die kurzzeitige Schwankungen stärker unterdrückt werden. Ohne diese Veränderung der typischen Korrelationszeit bliebe der Verlauf an der Erdoberfläche bis auf auf einen konstanten Faktor (und eine konstante zeitliche Verschiebung) gleich dem Verlauf einer vorgegebenen Realisierung des stationären Gauß-Prozesses an der Kern-Mantel-Grenze.

Während für $\tau_s(n) \ll \tau_x$ sich der stationäre Gauß-Prozeß an der Erdoberfläche fast nicht vom stationären Gauß-Prozeß an der Kern-Mantel-Grenze unterscheidet, beeinflusst der elektrisch leitende Erdmantel den stationären Gauß-Prozeß an der Erdoberfläche merklich, wenn $\tau_s(n) > \tau_x$ gilt. Diese Eigenschaft soll im folgenden an Realisierungen des stationären Gauß-Prozesses an der Kern-Mantel-Grenze mit unterschiedlichen typischen Korrelationszeiten veranschaulicht werden. Für die Fortsetzung konkreter Realisierungen

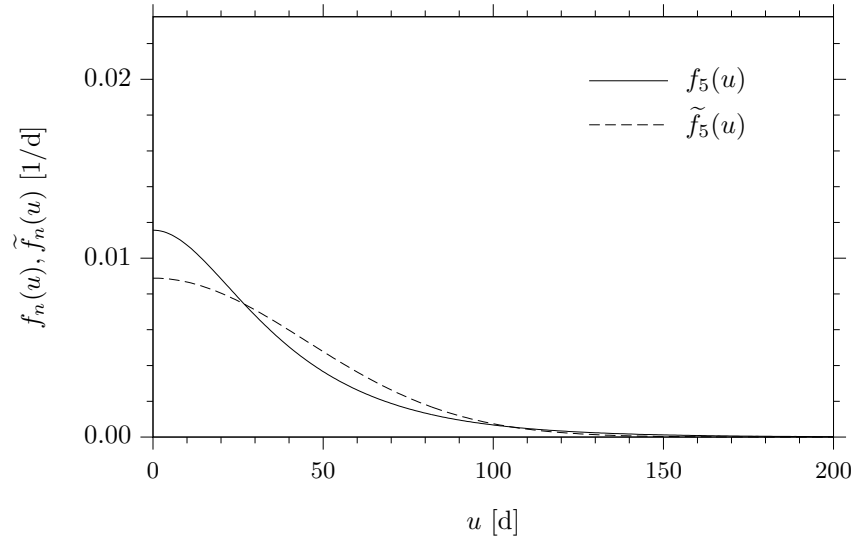


(a) Grad $n = 1$

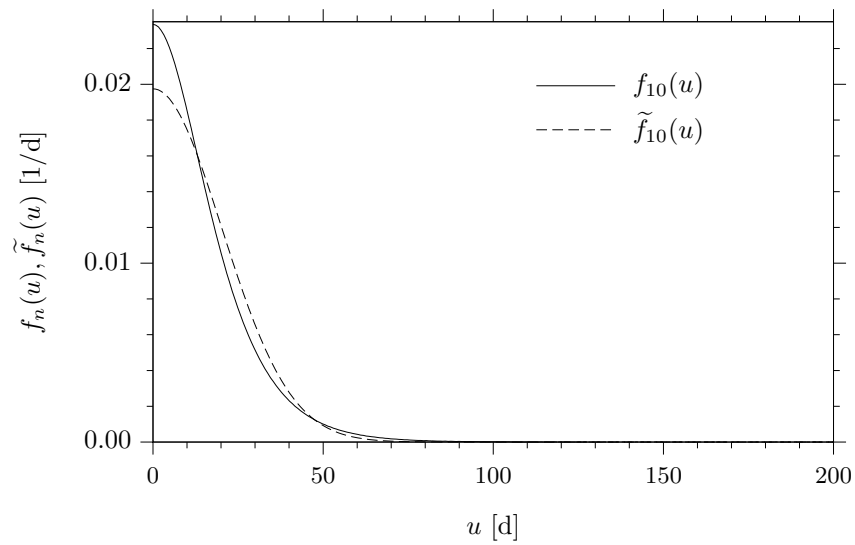


(b) Grad $n = 2$

Abbildung 4.5: Die Funktionen $f_n(u)$ und $\tilde{f}_n(u)$ beschreiben den von der Zeitdifferenz u abhängigen Anteil der Autokovarianzfunktion $R_y(u)$ bzw. der Näherung $\tilde{R}_y(u)$ und sind die inversen Fourier-Transformierten der Funktionen $F_n(\omega)$ bzw. $\tilde{F}_n(\omega)$, vgl. Abbildung 4.4. Dargestellt sind $f_n(u)$ und $\tilde{f}_n(u)$ für die Grade $n = 1, 2, 5$ und 10 . An der Kern-Mantel-Grenze wird ein weißes Spektrum angenommen, das zeitlich unkorreliert ist. Erst durch den Mantel, der als Tiefpaßfilter wirkt, entsteht die Abhängigkeit von u . (Abbildung wird fortgesetzt.)



(c) Grad $n = 5$



(d) Grad $n = 10$

Abbildung 4.5: (Fortsetzung)

des stationären Gauß-Prozesses wird zu dem Vorgehen gewechselt, wie es in Abbildung 4.2 skizziert ist.

Als Modell für die elektrische Leitfähigkeit des Erdmantels wird das Modell S verwendet und der Grad $n = 2$ betrachtet, für den das Modell die Glättungszeit $\tau_s(2) = 65.53$ d liefert, siehe Tabelle 3.1b auf Seite 76. Vorgegeben wird außerdem der zeitliche Verlauf eines Gauß-Koeffizienten $G_2^m(t)$ oder $H_2^m(t)$ an der Kern-Mantel-Grenze als Realisierung $x(t)$ eines stationären Gauß-Prozesses mit rotem Spektrum (vgl. Gleichung 4.45) und dem Mittelwert Null. Aus $x(t)$ wird dann der zeitliche Verlauf $y(t)$ des entsprechenden Gauß-Koeffizienten g_2^m bzw. h_2^m an der Erdoberfläche bestimmt. Dazu wird im Frequenzbereich das Produkt der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ mit der Übertragungsfunktion $\Gamma_2(\omega)$ gebildet, vgl. Gleichung (4.29), und das Ergebnis $Y(\omega)$ wieder in den Zeitbereich zurück transformiert. Anders als bei der bisherigen Betrachtung des stationären Gauß-Prozesses wird nicht die Backussche Näherung Gleichung (3.22) verwendet, sondern die exakte Übertragungsfunktion $\Gamma_2(\omega)$.

In Abbildung 4.6 sind als Beispiele die Ergebnisse für die typischen Korrelationszeiten $\tau_x = 4\tau_s(n)$, $2\tau_s(n)$, $\tau_s(n)$, $\frac{1}{2}\tau_s(n)$ und $\frac{1}{4}\tau_s(n)$ dargestellt. Die durchgezogenen Kurven geben den zeitlichen Verlauf an der Erdoberfläche für den elektrisch leitenden Mantel wieder. Als gestrichelte Kurve ist zum Vergleich der zeitliche Verlauf eingezeichnet, der sich für den nichtleitenden Mantel ergibt und der bis auf die geometrische Abschwächung und die Normierung gleich dem Verlauf an der Kern-Mantel-Grenze ist. Alle Kurven sind auf σ_{nl} normiert mit

$$\sigma_{nl}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y_{nl}^2(t) dt,$$

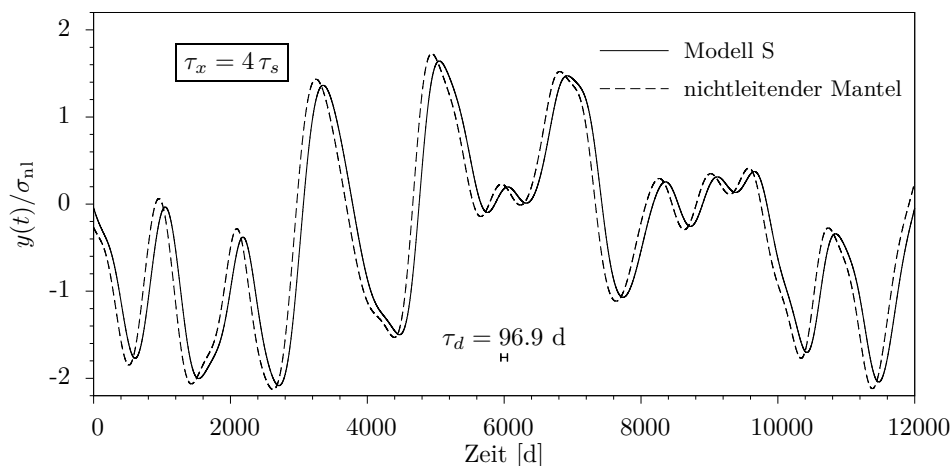
wobei $y_{nl}(t)$ der zeitliche Verlauf im Fall des nichtleitenden Mantels ist (gestrichelte Kurven in Abbildung 4.6). Da $y_{nl}(t)$ eine Realisierung eines Gauß-Prozesses ist, handelt es sich bei σ_{nl}^2 um die Varianz des zugrundeliegenden Prozesses, vgl. Gleichung (4.7). Die Kurven sind normiert, weil der Betrag durch das Eingangssignal an der Kern-Mantel-Grenze bestimmt wird und hier keine Rolle spielt. Um die Ergebnisse besser vergleichen zu können, liegt allen Abbildungen dieselbe Realisierung eines stationären Gauß-Prozesses zugrunde. Die Abszisse dieser Realisierung ist jeweils so skaliert, daß sie einer Realisierung mit vorgegebenem τ_x entspricht. Dadurch sind die gestrichelten Kurven in allen fünf Darstellungen der Abbildung 4.6 deckungsgleich. Die verwendeten Zeitintervalle entsprechen ungefähr dem 45-fachen der typischen Korrelationszeit τ_x und variieren zwischen 12 000 d und 750 d. Die Glättungszeit τ_s ist durch das Modell S und die Wahl von $n = 2$ festgelegt.

Je kleiner die typische Korrelationszeit der Anregung im Verhältnis zur Glättungszeit ist, desto größer ist der Einfluß des elektrisch leitenden Mantels. Der Vergleich zum nichtleitenden Mantel verdeutlicht, in welchem Maße Feinheiten im zeitlichen Verlauf von $y(t)$ durch die elektromagnetische Dämpfung verloren gehen. Während die Dämpfung für $\tau_x = 4\tau_s(n)$ und $\tau_x = 2\tau_s(n)$ noch sehr gering ist, beeinflusst sie den Verlauf für $\tau_x = \tau_s(n)$ schon merklich und prägt ihn für $\tau_x = \frac{1}{2}\tau_s(n)$ und $\tau_x = \frac{1}{4}\tau_s(n)$. Bei der Betrachtung der Realisierung eines Gauß-Prozesses tritt auch die Diffusionszeit $\tau_d(n)$ als zeitliche Verzögerung in Erscheinung, die sich in der Verschiebung zwischen der gestrichelten und der durchgezogenen Kurve niederschlägt. Bei der Betrachtung der Gauß-Prozesse selbst spielen zeitliche Verschiebungen keine Rolle, weshalb die Diffusionszeit für sie nicht relevant

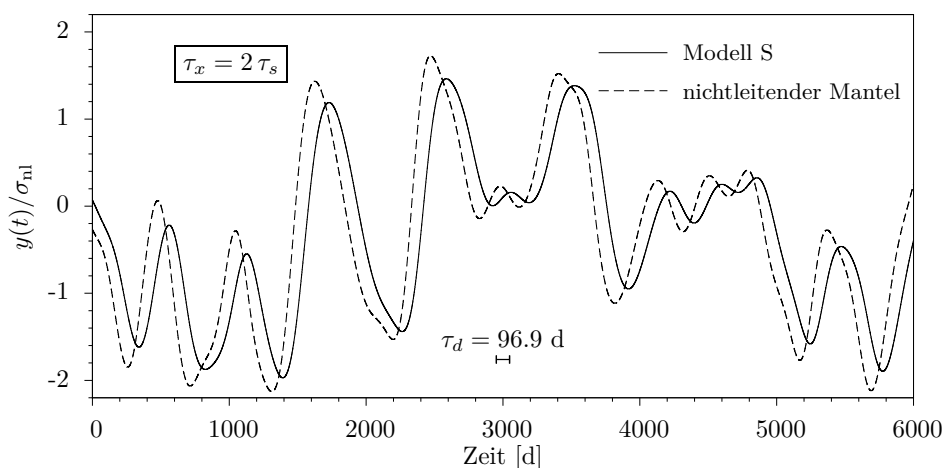
ist. Für das Modell S und den Grad $n = 2$ beträgt die Diffusionszeit $\tau_d(2) = 96.9$ d. In den Teilabbildungen 4.6a und 4.6b tritt sie am deutlichsten hervor, weil die durchgezogenen Kurven nur wenig geglättet sind. Die Verschiebung zwischen den Kurven wirkt zwar in Abbildung 4.6b größer als in Abbildung 4.6a, aber dies liegt ausschließlich an der Skalierung der Zeitachsen. Zum Vergleich ist in allen Abbildungen ein Intervall der Länge $\tau_d = 96.9$ d eingezeichnet.

Die Behandlung der Gauß-Koeffizienten als stationäre Gauß-Prozesse führt zu Modellen, die den zeitlichen Verlauf realistischer beschreiben können als die zuvor betrachteten harmonischen und transienten Anregungen. Am Beispiel des roten Spektrums an der Kern-Mantel-Grenze wird deutlich, daß man durch den Vergleich der typischen Korrelationszeit mit der Glättungszeit eines gegebenen Modells der elektrischen Leitfähigkeit des Erdmantels bereits abschätzen kann, ob sich die elektromagnetische Dämpfung auf das Spektrum an der Erdoberfläche auswirkt.

Die statistische Anregung des Magnetfeldes an der Kern-Mantel-Grenze wird im folgenden Kapitel verwendet, um zu untersuchen, ob eine laterale Inhomogenität nahe der Kern-Mantel-Grenze im zeitlichen Mittel zu beobachtbaren Unterschieden an der Erdoberfläche führen kann.

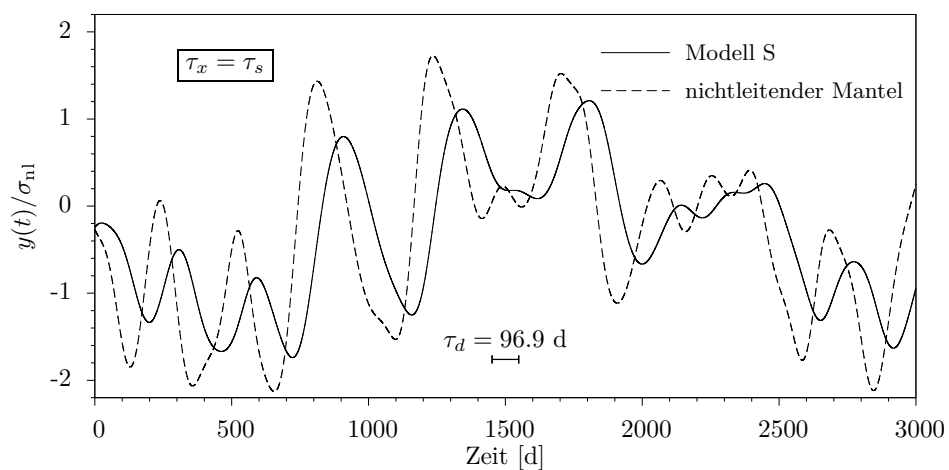


(a) Typische Korrelationszeit der Anregung $\tau_x = 262.1$ d.

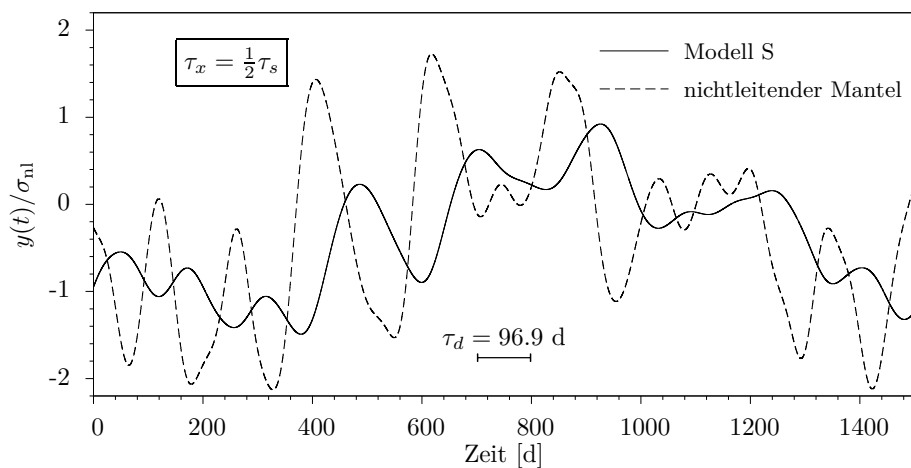


(b) Typische Korrelationszeit der Anregung $\tau_x = 131.1$ d

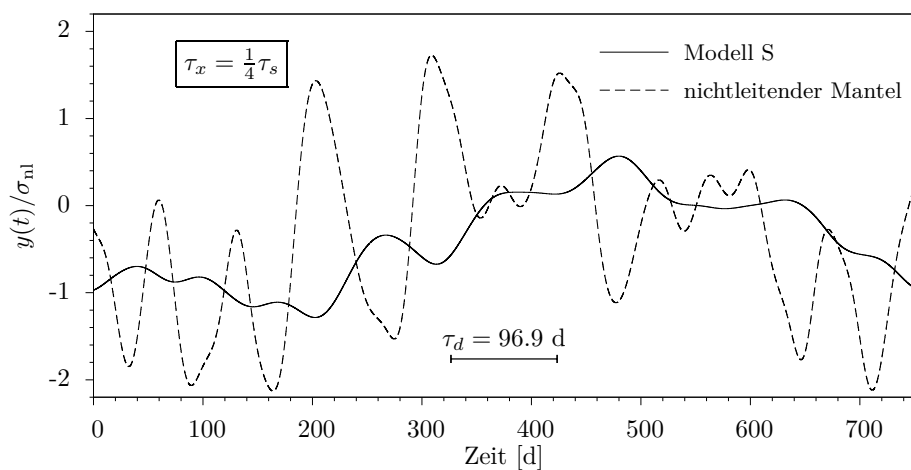
Abbildung 4.6: Die Kurven zeigen einen Ausschnitt aus dem zeitlichen Verlauf von Gauß-Koeffizienten vom Grad $n = 2$ an der Erdoberfläche für eine vorgegebene Anregungen an der Kern-Mantel-Grenze. Die Anregungen sind Realisierungen von stationären Gauß-Prozessen mit roten Spektren, die durch verschiedene typische Korrelationszeiten τ_x charakterisiert sind. Die gestrichelten Kurven gelten für den nichtleitenden Mantel und die durchgezogenen Kurven für einen Mantel, dessen elektrische Leitfähigkeit durch das Modell S beschrieben wird. Alle Kurven sind auf die Standardabweichung σ_{nl} normiert (vgl. Text).



(c) Typische Korrelationszeit der Anregung $\tau_x = 65.5$ d



(d) Typische Korrelationszeit der Anregung $\tau_x = 32.8$ d



(e) Typische Korrelationszeit der Anregung $\tau_x = 16.4$ d

Abbildung 4.6: Zeitlicher Verlauf von Gauß-Koeffizienten vom Grad $n = 2$ an der Erdoberfläche für vorgegebene Anregungen (Fortsetzung)

Kapitel 5

Diffusion der Säkularvariation durch den lateral inhomogenen Mantel

In diesem Kapitel soll untersucht werden, ob großräumige laterale Inhomogenitäten der elektrischen Leitfähigkeit im untersten Bereich des Mantels die Säkularvariation beeinflussen können. Eine erhöhte elektrische Leitfähigkeit an der Kern-Mantel-Grenze unter dem pazifischen Raum wird aufgrund verschiedener Eigenschaften des Magnetfeldes diskutiert, wobei man zwischen dem Dipolfeld und dem Restfeld, das auch als Nichtdipolanteil bezeichnet wird, unterscheidet. Außerdem stehen Daten sehr unterschiedlicher Genauigkeiten zur Verfügung. Zum einen wird die Säkularvariation seit Beginn exakter und systematischer geomagnetischer Messung (ca. 1834) verwendet, zum anderen die aus paläomagnetischen Untersuchungen abgeleitete Paläosäkularvariation.

Das Magnetfeld zeigt eine Westdrift, d. h. eine langsame Verschiebung nach Westen, allerdings unterscheiden sich die einzelnen Multipolanteile im Driftverhalten (Martin, 2000). Während das Dipolfeld kaum driftet, bewegt sich das Restfeld um etwa 0.25° pro Jahr. Es fällt auf, daß die Westdrift im wesentlichen auf den atlantischen Raum beschränkt ist (Merrill et al., 1996), und historische sowie paläomagnetische Daten deuten daraufhin, daß große Strukturen des Restfeldes den Pazifik nicht durchqueren können (Backus et al., 1996). Zu dieser Dämpfung der Säkularvariation paßt ein deutlich schwächeres Restfeld im Bereich des Pazifischen Ozeans. Walker und Backus (1996) verdeutlichen den Unterschied an der Differenz der Mittelwerte von B_r^2 gemittelt über die pazifische und die atlantische Hemisphäre.

Aus Daten von Feldumkehrungen der letzten fünf Millionen Jahre wird geschlossen, daß die virtuellen geomagnetischen Pole (VGP) gehäuft auf zwei Pfaden liegen, die ungefähr westlich und östlich um den Pazifischen Ozean in Nord-Süd-Richtung verlaufen (Martin, 2000). Virtuelle geomagnetische Pole erhält man, wenn man aus der an einem Ort bestimmten Deklination und Inklination des Paläomagnetfeldes die Lage des geozentrischen Dipols bestimmt, der die gemessene Feldrichtung erklärt. Costin und Buffett (2004) versuchen, die bevorzugten Pfade mit großen lateralen Unterschieden in der elektrischen Leitfähigkeit an der Kern-Mantel-Grenze zu erklären, die das Feld während der Umpolungen beeinflussen und zu einer Häufung der Pfade der virtuellen geomagnetischen Pole führen. Dies Ergebnis ist jedoch zweifelhaft.

Ob das Restfeld auch in der Vergangenheit im pazifischen Raum geschwächt war, wird kontrovers diskutiert. Johnson und Constable (1998) betrachten das Modell eines exzentrischen Dipols und kommen zu unterschiedlichen Ergebnissen für das historische Magnetfeld seit dem Jahr 1840 einerseits und für das paläomagnetische Feld der letzten fünf Millionen Jahre andererseits. Im pazifischen Raum ist der Beitrag des exzentrischen Dipols zum

historischen Magnetfeld vergleichsweise klein, jedoch ist sein Beitrag zum paläomagnetischen Feld groß. Ebenfalls umstritten ist die Behauptung, daß die Streuung der Winkel zwischen den virtuellen geomagnetischen Polen und der Rotationsachse bzw. dem mittleren virtuellen geomagnetischen Pol im Pazifik kleiner sei als in anderen Regionen. Diese geringere Streuung könnte mit einem geschwächten Restfeld im pazifischen Raum erklärt werden. McElhinny et al. (1996) weisen auf Probleme bei der Auswahl der Daten hin und gelangen mit eigenen, strengeren Kriterien bei der Auswahl zu dem Ergebnis, daß die Streuung der Winkel im Pazifik nicht von der Streuung in anderen Regionen abweicht. Sie widersprechen der Hypothese, nach der das Restfeld in der Vergangenheit im Pazifik deutlich geschwächt war.

Im folgenden soll ein Hypothesentest an einem einfachen lateral inhomogenen Leitfähigkeitsmodell durchgeführt werden. Dabei handelt es sich um eine dünne inhomogene Kugelfläche, die nahe der Kern-Mantel-Grenze in einen radialsymmetrisch geschichteten Erdmantel eingebettet ist. Dies Modell – mit der Kugelfläche an der Erdoberfläche – wurde zuerst von Fainberg und Singer (1980) behandelt und von Fainberg et al. (1990a) numerisch verfeinert. Für die Berechnung wird ein Programm verwendet, das P. Weidelt (persönliche Kommunikation) erstellt hat. Nach einer kurzen Übersicht über die Vorgehensweise und der Vorstellung des konkreten Leitfähigkeitsmodells wird der Einfluß eines lateral inhomogenen Mantels anhand von drei Fällen untersucht. Zunächst dienen einfache Dipole mit harmonischer Anregung dazu, einen groben Überblick über die Frequenzabhängigkeit zu gewinnen. Anschließend werden die oszillierenden Dipole zu einem rotierenden Dipol überlagert, der als einfaches Modell für eine Westdrift und – mit Einschränkungen – für eine Feldumkehrung dienen soll. Abschließend wird mit einem statistischen Modell für die Anregung des Restfeldes an der Kern-Mantel-Grenze untersucht, wie sich die laterale Inhomogenität auf das Restfeld an der Erdoberfläche auswirkt. Der letzte Punkt ist das Kernanliegen dieses Kapitels.

5.1 Berechnung des Feldes an der Erdoberfläche

In diesem Abschnitt soll kurz erläutert werden, wie die Radialkomponente des Magnetfeldes an der Erdoberfläche berechnet wird. Sie resultiert aus der vorgegebenen Radialkomponente an der Kern-Mantel-Grenze nach der Diffusion durch den lateral inhomogenen Erdmantel. Die Grundlage bildet die Theorie der Diffusion durch den geschichteten Mantel, die in Kapitel 2 detailliert ausgeführt ist.

Die Berechnung des induzierten elektromagnetischen Feldes in einem Mantel mit beliebiger dreidimensionaler Inhomogenität der elektrischen Leitfähigkeit hat in jüngster Zeit in Verbindung mit extraterrestrischen Quellen (Sq und Dst) an Interesse gewonnen, z. B. Everett und Schultz (1996), Weiss und Everett (1998), Uyeshima und Schultz (2000), Martinec (1997, 1999), Martinec et al. (2003), Velínský und Martinec (2005).

5.1.1 Modellstruktur und Grundgleichungen

Auch hier werden sphärische Polarkoordinaten (r, ϑ, φ) verwendet. Die Kern-Mantel-Grenze liegt bei $r = c$ und die Erdoberfläche bei $r = a$. Die inhomogene Schale liege

bei $r = b$, $c < b < a$. Sie zerlegt den Raum außerhalb des Erdkerns in drei Bereiche

$$\begin{aligned} V_- &= \{ \mathbf{r} \mid c < r < b \}, \\ S &= \{ \mathbf{r} \mid r = b \}, \\ V_+ &= \{ \mathbf{r} \mid r > b \}. \end{aligned}$$

Der Bereich V_+ schließt auch den Raum $r > a$ außerhalb der Erde ein.

Die Schale besitze die integrierte Leitfähigkeitsverteilung (oder Leitwertverteilung)

$$\tau(\vartheta, \varphi) = \tau_n + \tau_a(\vartheta, \varphi).$$

Dabei bedeutet τ_n einen lateral invarianten normalen Anteil und $\tau_a(\vartheta, \varphi)$ den lateral heterogenen anomalen Anteil. Diese Zerlegung in normalen und anomalen Anteil ist weitgehend willkürlich, die Definition von $\tau_n > 0$ wird durch numerische Zweckmäßigkeit bestimmt. Es sei $\sigma_n(r)$ die radialsymmetrische Leitfähigkeitsverteilung außerhalb der Schale, d. h. für $r \neq b$. Dann gilt

$$\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_n(r) + \tau(\vartheta, \varphi) \delta(r - b) = \sigma_n(r) + \tau_n \delta(r - b) + \tau_a(\vartheta, \varphi) \delta(r - b) \quad (5.1)$$

mit $\sigma_n(r) = \infty$ für $r < c$ und $\sigma_n(r) = 0$ für $r > a$.

Es wird zunächst angenommen, daß die Säkularvariation eine harmonische Anregung $\sim \exp(+i\omega t)$ besitzt. Dann lauten die relevanten Feldgleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad (5.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma_n \mathbf{E}, \quad \mathbf{r} \in V_{\pm}, \quad (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H})|_{\pm}^{\pm} = \tau \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (5.3)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E} = c \nabla_s T \text{ bei } r = c \quad \text{und} \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{0} \text{ für } r \rightarrow \infty. \quad (5.4)$$

Dabei ist T das toroidale Potential (vgl. Abschnitt 2.5). In diesem Abschnitt bezeichnet der Index s einen in der Kugelschale liegenden tangentialen Vektor. Die Leitfähigkeitsinhomogenität tritt nur im zweiten Term von Gleichung (5.3) im Sprung der magnetischen Tangentialkomponenten an der Schale auf. Hier wird für eine beliebige Größe ψ die Bezeichnung

$$\psi|_{\pm}^{\pm} := \psi(r = b^+) - \psi(r = b^-)$$

eingeführt. Der Sprung wird durch die Flächenstromdichte $\mathbf{j}_s = \tau \mathbf{E}_s$ verursacht. An der Oberfläche des ideal leitenden Kerns bei $r = c$ verschwindet der *induzierte* Anteil des tangentialen elektrischen und radialen magnetischen Feldes. Übrig bleibt das Säkularvariationsfeld, das von der Flüssigkeitsströmung \mathbf{u} im Kern erzeugt wird. Im Fall eines ideal leitenden Kerns lautet das als gegeben angenommene Quellfeld bei $r = c$

$$\mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{r}T) \quad \text{mit} \quad c \nabla_s^2 T = i\omega B_r = -\nabla_s \cdot (\mathbf{u}_s B_r).$$

Dabei ist \mathbf{u}_s die tangentiale Flüssigkeitsströmung an der Kern-Mantel-Grenze (Backus et al., 1996, S. 252). Weiterhin wurde angenommen, daß an der Kern-Mantel-Grenze keine galvanischen Leckströme vom Kern in den Mantel fließen. Diese Ströme hätten im elektrischen Feld einen zusätzlichen poloidalen Quellterm erforderlich gemacht, würden aber im radialen Magnetfeld unsichtbar bleiben.

Nach der Elimination von \mathbf{H} aus (5.2) und (5.3) erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu_0\sigma_n\mathbf{E} &= \mathbf{0} \quad \text{für } \mathbf{r} \in V_{\pm}, \\ (\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times \mathbf{E})|_{\pm}^{\pm} + i\omega\mu_0\tau\mathbf{E}_s &= \mathbf{0} \quad \text{für } \mathbf{r} \in S \end{aligned} \quad (5.5)$$

mit den Randbedingungen (5.4).

Die Zerlegung von $\sigma(\mathbf{r})$ in Gleichung (5.1) verlangt die entsprechende Zerlegung aller Feldkomponenten in einen normalen Anteil (Index n) und einen anomalen Anteil (Index a). Mit

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_a, \quad \mathbf{E}_s = \mathbf{E}_{ns} + \mathbf{E}_{as}$$

lautet das normale Problem

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_n + i\omega\mu_0\sigma_n\mathbf{E}_n &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in V_{\pm}, \\ (\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times \mathbf{E}_n)|_{\pm}^{\pm} + i\omega\mu_0\tau_n\mathbf{E}_{ns} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in S, \end{aligned} \quad (5.6)$$

wobei \mathbf{E}_n die Randbedingungen

$$\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_n = c \nabla_s T \quad \text{bei } r = c \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_n \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (5.7)$$

zu erfüllen hat. Das anomale Problem ist

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_a + i\omega\mu_0\sigma_n\mathbf{E}_a &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in V_{\pm}, \\ (\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times \mathbf{E}_a)|_{\pm}^{\pm} + i\omega\mu_0(\tau_n\mathbf{E}_{as} + \tau_a\mathbf{E}_s) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in S, \end{aligned} \quad (5.8)$$

mit den Randbedingungen

$$\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_a = \mathbf{0} \quad \text{bei } r = c \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_a \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (5.9)$$

Das normale Problem kann mit den aus Kapitel 2 bekannten Methoden gelöst werden. Wenn \mathbf{E}_{ns} bekannt ist, gewinnt man die Lösung des anomalen Problems – mit $\tau_a\mathbf{E}_{ns}$ als Quellterm – durch Lösung einer Integralgleichung für \mathbf{E}_s oder für die Flächenstromdichte $\mathbf{j}_s = \tau\mathbf{E}_s$.

5.1.2 Integralgleichung und Feldfortsetzung

Die Ableitung der Integralgleichung für \mathbf{E}_s folgt im wesentlichen der Behandlung durch Vasseur und Weidelt (1977) für eine ebene dünne Schicht. Man erhält aus (5.8) und (5.9) die Gleichung

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{ns}(\mathbf{r}) - i\omega\mu_0 \int_S \mathcal{G}_{ss_0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{E}_s(\mathbf{r}_0) \tau_a(\mathbf{r}_0) dS_0, \quad \mathbf{r} \in S. \quad (5.10)$$

Hier ist $\mathcal{G}_{ss_0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ ein Greenscher (2×2) -Tensor. Seine physikalische Interpretation ist folgende: Man plziert in der *normalen* Leitfähigkeitsverteilung am Ort $\mathbf{r}_0 \in S$ in Tangentialrichtung $\hat{\mathbf{s}}_0$ einen elektrischen Einheitsdipol und beobachtet das resultierende elektrische Tangentialfeld in Richtung $\hat{\mathbf{s}}$ am Punkt $\mathbf{r} \in S$. Die Reziprozität drückt sich aus in der Symmetrie $\mathcal{G}_{ss_0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \mathcal{G}_{ss_0}^T(\mathbf{r}_0|\mathbf{r})$. Dabei bedeutet das hochgestellte T die Transposition. Da nur die normale Schichtung eingeht, ist die Berechnung von $\mathcal{G}_{ss_0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ nicht

schwierig (aber aufwendig). Nach einer Diskretisierung von \mathbf{E}_s auf der Schale S reduziert sich Gleichung (5.10) auf ein lineares Gleichungssystem, das im allgemeinen iterativ gelöst wird.

Wenn \mathbf{E}_s bestimmt ist, gewinnt man den vollständigen dreikomponentigen elektrischen Feldvektor $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und den magnetischen Feldvektor $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -1/(i\omega) \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$ für alle Punkte $\mathbf{r} \in V_{\pm}$ (also insbesondere auch an der Erdoberfläche $r = a$) aus der Fortsetzungsgleichung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) - i\omega\mu_0 \int_S \mathcal{G}_{s_0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{E}_s(\mathbf{r}_0) \tau_a(\mathbf{r}_0) dS_0, \quad \mathbf{r} \in V_{\pm} \quad (5.11)$$

Dabei ist jetzt $\mathcal{G}_{s_0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ ein Greenscher (3×2) -Tensor, dessen Spalten die dreikomponentigen Feldvektoren am Ort $\mathbf{r} \in V_{\pm}$ sind, die von tangentialen elektrischen Einheitsdipolen in Richtung $\hat{\mathbf{s}}_0$ am Ort \mathbf{r}_0 erzeugt werden. Wählt man zur Komponentendarstellung von $\mathcal{G}_{s_0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ die drei orthogonalen Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ und $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, so ist

$$\mathcal{G}_{s_0} = \begin{pmatrix} G_{r\vartheta_0} & G_{r\varphi_0} \\ G_{\vartheta\vartheta_0} & G_{\vartheta\varphi_0} \\ G_{\varphi\vartheta_0} & G_{\varphi\varphi_0} \end{pmatrix}.$$

Das Feld eines tangentialen elektrischen Einheitsdipols wird durch zwei Strommoden repräsentiert: Die *toroidale* Strommode (Index t) beschreibt tangentiale Ströme, die den umgebenden Mantel induktiv an die Kugelschale $r = b$ ankoppeln; die *poloidale* Strommode (Index p) mit ihrer Radialkomponente koppelt dagegen den umgebenden Mantel galvanisch an die Kugelschale $r = b$ an und tritt deshalb bei fehlender galvanischer Verbindung der Schale zum Mantel nicht auf. Mit den drei Skalarfunktionen $G_{st}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$, $G_{sp}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ und $G_{rp}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$, die jeweils bezüglich der Argumente \mathbf{r} und \mathbf{r}_0 symmetrisch sind, hat $\mathcal{G}_{s_0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ die allgemeine Darstellung.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{s_0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = & (\nabla \times \hat{\mathbf{r}}) \otimes (\nabla_0 \times \hat{\mathbf{r}}_0) G_{st}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \\ & + \nabla_s \otimes \nabla_{s_0} G_{sp}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) + \hat{\mathbf{r}} \otimes \nabla_{s_0} G_{rp}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in S, \quad \mathbf{r} \in V_{\pm}. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet \otimes das dyadische Produkt.

Zur Berechnung der an einer Leitfähigkeitsanomalie gestreuten magnetischen Säkularvariation sind die folgenden sechs Schritte erforderlich:

1. Berechnung von \mathbf{E}_{ns} auf der Kugelschale $r = b$
2. Berechnung des Greenschen Tensors $\mathcal{G}_{s_0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$
3. Berechnung von \mathbf{E}_s durch direkte oder iterative Lösung des aus Gleichung (5.10) resultierenden linearen Gleichungssystems
4. Berechnung des normalen Magnetfeldes $\mathbf{B}_n(\mathbf{r})$ am Beobachtungsort \mathbf{r} (z. B. Erdoberfläche)
5. Berechnung der Magnetfeldkerne $\mathcal{B}_{s_0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) := -1/(i\omega) \nabla \times \mathcal{G}_{s_0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ am Ort \mathbf{r}

6. Berechnung des anomalen Magnetfeldes durch

$$\mathbf{B}_a(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_S \mathcal{B}_{s_0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{E}_s(\mathbf{r}_0) \tau_a(\mathbf{r}_0) dS_0$$

Besonders aufwendig ist Schritt 2, in dem für jede Position $\mathbf{r}_0 \in S$ des tangentialen Einheitsdipols das resultierende Tangentialfeld an jedem Punkt $\mathbf{r} \in S$ berechnet werden muß. Durch Ausnutzung von Symmetrien, Reziprozitäten und Translationsinvarianzen läßt sich der Aufwand jedoch stark reduzieren.

5.1.3 Modell $S\delta_2$ eines lateral inhomogenen Mantels

Am Ende von Abschnitt 3.4 wurde das Modell SD eines Mantels mit einer 250 km dicken, sehr gut leitenden D'' -Schicht durch Modell $S\delta$ angenähert, in dem eine infinitesimal dünne Schale an die Stelle der D'' -Schicht tritt. Diese Schale besitzt den Leitwert $\tau = 2.425 \cdot 10^8$ S und den Radius $b = 3691$ km, sie liegt also 210 km oberhalb der Kern-Mantel-Grenze. Dies Modell wird zu dem neuen, sehr einfachen Modell $S\delta_2$ für einen lateral inhomogenen Mantel erweitert, indem die Schale in Hemisphären mit verschiedenen Leitwerten geteilt wird. Abbildung 5.1 zeigt die Lage der Schale im Mantel, und Abbildung 5.2 zeigt die Lage der Hemisphären, deren Grenze entlang der Längengrade $\varphi = 90^\circ$ bzw. $\varphi = 270^\circ$ verläuft. Die Leitwerte in der atlantischen und der pazifischen Hemisphäre sind $\tau_A = 10^8$ S bzw. $\tau_P = 5 \cdot 10^8$ S. Im Vergleich zum Ausgangsmodell $S\delta$ ist der Leitwert in der atlantischen Hemisphäre herabgesetzt und in der pazifischen Hemisphäre heraufgesetzt.

Eine erste, grobe Einschätzung des Modells $S\delta_2$ soll mit Hilfe der Glättungszeiten $\tau_s(n)$ erfolgen, die in Tabelle 5.1 für die verschiedenen Modelle aufgelistet sind. Die Glättungszeit wird für den Vergleich herangezogen, weil im folgenden der glättende Einfluß des Mantels eine wichtigere Rolle spielt als die Verzögerung zwischen dem Auftreten einer Änderung an der Kern-Mantel-Grenze und der Auswirkung an der Erdoberfläche, die

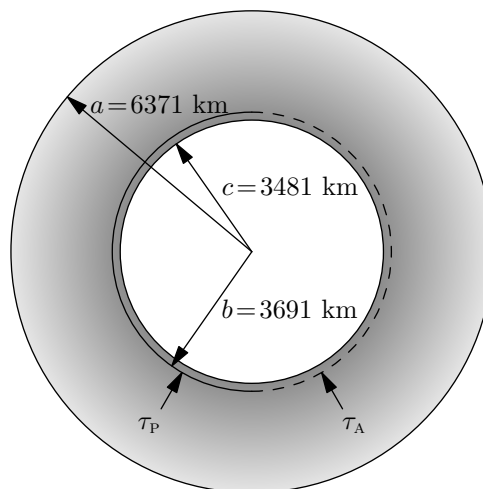


Abbildung 5.1: Die lateral inhomogene Schale hat den Radius $b = 3691$ km, und ihr Abstand von der Kern-Mantel-Grenze beträgt 210 km. Sie besteht aus Hemisphären mit den Leitwerten τ_A und τ_P .

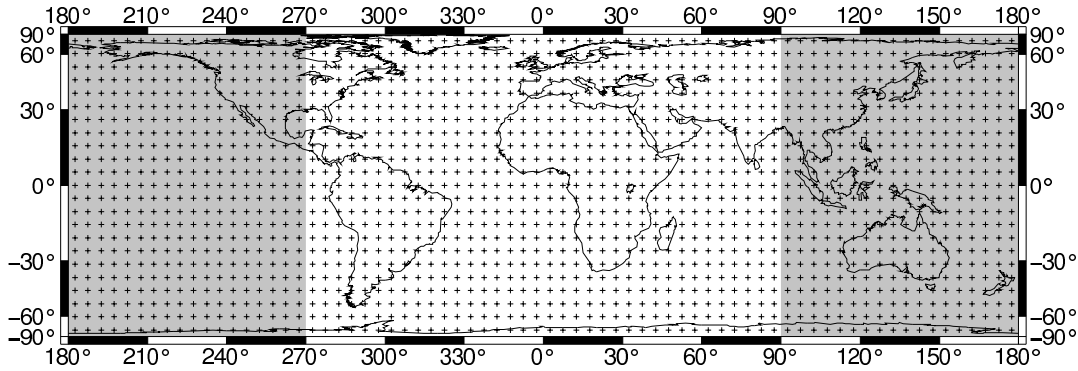


Abbildung 5.2: In Lamberts flächentreuer Zylinderprojektion der Weltkarte sind die atlantische (weiß) und pazifische (grau) Hemisphäre sowie die 72×23 Gitterpunkte (Kreuze) eingezeichnet, in denen B_r an der Erdoberfläche berechnet wird. Verwendet werden die geographische Länge φ und die geographische Breite β .

durch die Diffusionszeit beschrieben wird. Die Glättungszeiten des Modells S ohne erhöhte elektrische Leitfähigkeit im unteren Mantel zeigen, wie klein die Glättungszeiten möglicherweise sein können. Bei Modell SD mit einer hohen elektrischen Leitfähigkeit in einer 250 km dicken D''-Schicht sind die Glättungszeiten deutlich größer. Modell S δ ist so konstruiert, daß es ungefähr die gleichen Glättungszeiten besitzt wie Modell SD, aber die erhöhte elektromagnetische Dämpfung wird nicht durch eine 250 km dicke Schicht erzielt (wie es in Modell SD der Fall ist), sondern durch eine infinitesimal dünne Schicht mit einem hohen Leitwert. Das Modell S δ_2 wird in der Tabelle 5.1 durch das atlantische Modell S δ_2^A und das pazifische Modell S δ_2^P repräsentiert. Die Glättungszeiten der beiden Modelle sind *ohne* laterale Inhomogenität berechnet, wobei jeweils eine homogene dünne Schicht mit dem Leitwert der atlantischen bzw. der pazifischen Hemisphäre des Modells S δ_2 verwendet wird. Der Vergleich mit Modell S offenbart, daß sowohl im Modell S δ_2^A als auch Modell S δ_2^P der größte Beitrag zur Glättungszeit von der dünnen Schicht stammt. Die Glättungszeiten für die Modelle S δ_2^A und S δ_2^P unterscheiden sich fast um den Faktor 5, der sich aus dem Quotienten τ_P/τ_A der Leitwerte der pazifischen und atlantischen Hemisphäre im Modell S δ_2 ergibt. Das tatsächliche Verhältnis ist aufgrund des Einflusses des Mantels außerhalb der dünnen Schichten etwas kleiner.

Vom geschichteten Mantel ist bekannt, daß er für Vorgänge auf Zeitskalen, die vergleichbar sind mit den Zeitkonstanten, starken Einfluß hat. Daher ist zu vermuten, daß ähnliches beim lateral inhomogenen Mantel gilt, wenn man die Zeitkonstanten eines radialsymmetrischen Modell zugrunde legt, in dem der größte auftretende Leitwert verwendet wird, hier also τ_P . Allerdings bringt der lateral inhomogene Mantel neue Effekte mit sich, die eine genaue Rechnung erfordern und deren Auswirkungen in den nächsten Abschnitten näher untersucht werden.

Für die Darstellung von B_r auf Karten wird ein flächentreuer Zylinderentwurf mit längentreuem Äquator verwendet (vgl. Abbildung 5.2), den bereits Lambert (1772) beschreibt. Bei Lamberts flächentreuer Zylinderprojektion wird als Abszisse die geographische Länge φ verwendet und als Ordinate der Sinus der geographischen Breite β , siehe Abbildung 5.3. Das Gitter, auf dem B_r berechnet wird, besitzt 72×23 Punkte. Der Ab-

n	Glättungszeit $\tau_s(n)$ [a]				
	Modell S	Modell SD	Modell S δ	aus Modell S δ_2 abgeleitet: Modell S δ_2^A Modell S δ_2^P	
1	0.24	1.99	1.99	0.88	4.02
2	0.18	1.86	1.87	0.81	3.78
3	0.14	1.75	1.76	0.75	3.57
4	0.11	1.65	1.66	0.70	3.37
5	0.09	1.56	1.57	0.66	3.20
6	0.07	1.48	1.49	0.62	3.03
7	0.06	1.41	1.42	0.59	2.88
8	0.05	1.34	1.35	0.56	2.74
9	0.04	1.27	1.28	0.53	2.61
10	0.04	1.21	1.22	0.51	2.49

Tabelle 5.1: Die Glättungszeiten für die geschichteten Mantelmodelle S δ_2^A und S δ_2^P , in die dünne Schichten mit den Leitwerten der atlantischen bzw. der pazifischen Hemisphäre des Modells S δ_2 eingebettet sind, werden den Glättungszeiten der bereits bekannten Modelle S, SD und S δ gegenübergestellt.

stand der Punkte in Richtung der Abszisse beträgt 5° bzw. $8.73 \cdot 10^{-2}$ im Bogenmaß und in Richtung der Ordinate $8.70 \cdot 10^{-2}$, vgl. Abbildung 5.2. Neben der geographischen Breite β wird weiterhin die Kobreite ϑ verwendet, wobei $\beta = 90^\circ - \vartheta$ gilt. Zwar werden häufig andere Projektionen zur Darstellung globaler Daten vorgezogen, aber die flächentreue Zylinderprojektion hat neben ihrer Einfachheit für die Zwecke dieser Arbeit zwei wesentliche Vorzüge. Erstens ist eine Verschiebung in Richtung der Abszisse frei von Verzerrungen, so daß bei einem Quellfeld, das sich in dieser Richtung bewegt, der Einfluß der Inhomogenität auf B_r klar hervortritt. Zweitens geht bei der Bestimmung des Mittels von B_r über eine Hemisphäre der Wert in jedem Gitterpunkt mit gleichem Gewicht ein, weil aufgrund der Flächentreue der Projektion jeder Punkt den gleichen Anteil an der Gesamtfläche repräsentiert.

Die N Gitterpunkte (ϑ_i, φ_j) werden zu gleichen Teilen auf die Mengen \mathcal{A} und \mathcal{P} der Punkte in der atlantischen bzw. pazifischen Hemisphäre aufgeteilt:

$$\mathcal{A} = \left\{ (\vartheta_i, \varphi_j) \mid \varphi_j < \frac{\pi}{2} \vee \varphi_j \geq \frac{3\pi}{2} \right\} \quad (5.12)$$

und

$$\mathcal{P} = \left\{ (\vartheta_i, \varphi_j) \mid \frac{\pi}{2} \leq \varphi_j < \frac{3\pi}{2} \right\} . \quad (5.13)$$

Damit sind die Mittelwerte einer über diese Hemisphären gemittelten Größe X näherungsweise gegeben durch

$$\langle X \rangle_A = \frac{2}{N} \sum_{(\vartheta_i, \varphi_j) \in \mathcal{A}} X(\vartheta_i, \varphi_j) \quad \text{bzw.} \quad \langle X \rangle_P = \frac{2}{N} \sum_{(\vartheta_i, \varphi_j) \in \mathcal{P}} X(\vartheta_i, \varphi_j) . \quad (5.14)$$

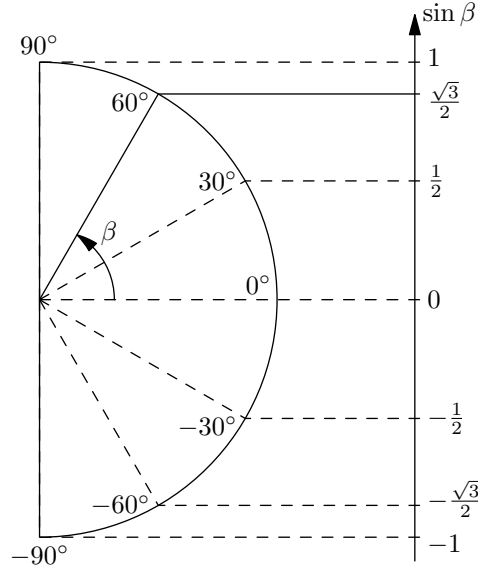


Abbildung 5.3: Bei Lamberts flächentreuer Zylinderprojektion wird die geographische Breite β auf $\sin \beta$ abgebildet. Das führt zu deutlichen Verzerrungen außerhalb von etwa $\pm 30^\circ$ Breite, die zu den Polen hin zunehmen.

5.1.4 Übertragungsfunktionen

An der Kern-Mantel-Grenze sei die Radialkomponente des Magnetfeldes mit Hilfe der Gauß-Koeffizienten G_n^m und H_n^m durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} B_{nr}^{cm}(r=c, \vartheta, \varphi) &:= (n+1) G_n^m \cos(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta), \\ B_{nr}^{sm}(r=c, \vartheta, \varphi) &:= (n+1) H_n^m \sin(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (5.15)$$

vorgegeben, wobei eine harmonische Anregung $\sim \exp(+i\omega t)$ der Gauß-Koeffizienten vorausgesetzt wird und sich n sowie m auf Grad bzw. Ordnung des *anregenden* Multipols beziehen. Die zugehörigen resultierenden Radialkomponenten $B_{nr}^{cm}(r=a, \vartheta, \varphi)$ und $B_{nr}^{sm}(r=a, \vartheta, \varphi)$ an der Erdoberfläche können mit dem in Abschnitt 5.1.2 vorgestellten Verfahren berechnet werden. Ihre Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen an der Erdoberfläche ist

$$\begin{aligned} B_{nr}^{cm}(r=a, \vartheta, \varphi) &= \sum_{n'=1}^{\infty} (n'+1) \sum_{m'=0}^{n'} \left[g_{nn'}^{cmm'} \cos(m'\varphi) + h_{nn'}^{cmm'} \sin(m'\varphi) \right] P_{n'}^{m'}(\cos \vartheta), \\ B_{nr}^{sm}(r=a, \vartheta, \varphi) &= \sum_{n'=1}^{\infty} (n'+1) \sum_{m'=0}^{n'} \left[g_{nn'}^{smm'} \cos(m'\varphi) + h_{nn'}^{smm'} \sin(m'\varphi) \right] P_{n'}^{m'}(\cos \vartheta), \end{aligned} \quad (5.16)$$

weil durch die laterale Inhomogenität an der Erdoberfläche im allgemeinen alle Grade n' und Ordnungen m' vertreten sind, selbst wenn die Anregung durch einen einzigen Multipol

des Grades n und der Ordnung m erfolgt. Rein formal können durch

$$\begin{aligned} B_{nr}^{cm}(r=a, \vartheta, \varphi) &=: \Gamma_n^{cm}(\vartheta, \varphi) G_n^m, \\ B_{nr}^{sm}(r=a, \vartheta, \varphi) &=: \Gamma_n^{sm}(\vartheta, \varphi) H_n^m \end{aligned} \quad (5.17)$$

die Übertragungsfunktionen Γ_n^{cm} und Γ_n^{sm} eingeführt werden. Während die Übertragungsfunktionen im Fall des geschichteten Mantels (vgl. Abschnitt 2.8) ausschließlich vom Grad n abhängen, sind sie beim lateral inhomogenen Mantel auch von der Ordnung m und den Ortskoordinaten (ϑ, φ) an der Erdoberfläche abhängig. Die Bezeichnungen B_{nr}^{cm} und B_{nr}^{sm} sind zwar zweckmäßig, aber unkonventionell. Es ist zu beachten, daß an der Erdoberfläche *nicht*

$$\begin{aligned} B_{nr}^{cm}(r=a, \vartheta, \varphi) &= (n+1) g_n^m \cos(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta) \quad \text{und} \\ B_{nr}^{sm}(r=a, \vartheta, \varphi) &= (n+1) h_n^m \sin(m\varphi) P_n^m(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (5.18)$$

mit den Gauß-Koeffizienten g_n^m und h_n^m gilt, sondern Gleichung (5.16). Tatsächlich ist die Gleichung (5.18) nur für eine radialsymmetrische Leitfähigkeitsverteilung im Erdmantel gültig.

Zur weiteren Vereinfachung der Schreibweise wird festgelegt, daß sich B_r auf die Radialkomponente an der Erdoberfläche $r = a$ beziehen soll (für die Beschreibung an der Kern-Mantel-Grenze werden die Gauß-Koeffizienten G_n^m und H_n^m verwendet) und die Abhängigkeit vom Ort (ϑ, φ) weggelassen wird. Damit läßt sich Gleichung (5.17) komprimiert schreiben als

$$B_{nr}^{cm} = \Gamma_n^{cm} G_n^m \quad \text{und} \quad B_{nr}^{sm} = \Gamma_n^{sm} H_n^m. \quad (5.19)$$

Obwohl die lateral inhomogene Leitfähigkeitsverteilung zu einer größeren Komplexität führt, bleibt eine sehr wichtige Eigenschaft erhalten: Der Mantel kann nach wie vor als linearer Filter behandelt werden, weil die Übertragungsfunktionen lineare Transformationen sind.

5.2 Feststehender Dipol

Ein Eindruck vom Einfluß der lateralen Inhomogenität des Modells $S\delta_2$ läßt sich gewinnen, wenn man Dipolfelder an der Kern-Mantel-Grenze als Quellfeld betrachtet, die mit konstanter Periode T oszillieren. Es wird zum einen der Dipol $|G_1^1| = 500$ nT und zum anderen der Dipol $|H_1^1| = 500$ nT vorgegeben. Beide Dipole liegen in der Äquatorebene. Im ersten Fall durchstößt die Dipolachse die Erdoberfläche am Äquator in den Zentren der Hemisphären, daher sind die Leitfähigkeitsverteilung und das resultierende Magnetfeld an der Erdoberfläche rotationssymmetrisch bezüglich der Dipolachse. Im zweiten Fall liegt die Dipolachse in der Ebene, die durch die Grenze zwischen den Hemisphären vorgegeben ist, und es existiert keine Rotationssymmetrie.

Die Wahl der Werte für $|G_1^1|$ und $|H_1^1|$ führt zu einem Maximum an der Kern-Mantel-Grenze von $B_r = 1000$ nT. Beim nichtleitenden Mantel ist das zugehörige Maximum an der Erdoberfläche $B_r \approx 163.1$ nT, der Zahlenwert entspricht der 1000-fachen geometrischen Abschwächung $(c/a)^3 \approx 0.1631$ für das Dipolfeld.

Da hier ausschließlich die Dipolterme G_1^1 und H_1^1 betrachtet werden, kann anstelle von B_{r1}^{c1} und B_{r1}^{s1} übersichtlicher B_r^c und B_r^s geschrieben werden, ohne daß es zu Verwechslungen kommen kann. Die Radialkomponente des Magnetfeldes an einem Ort an der Erdoberfläche, gegeben durch (ϑ, φ) , kann in der Form

$$B_r^c(\vartheta, \varphi) = |B_r^c(\vartheta, \varphi)| \exp\{i[\omega t + \psi(\vartheta, \varphi)]\} \quad (5.20)$$

mit der ortsabhängigen Phase ψ geschrieben werden. $|B_r^c|$ ist entsprechend die ortsabhängige Amplitude der Radialkomponente des Magnetfeldes an der Erdoberfläche.

5.2.1 G_1^1 -Dipol

Für den G_1^1 -Dipol zeigt Abbildung 5.4 Karten mit den Isolinien der Amplitude $|B_r^c|$. Die stärkere elektromagnetische Dämpfung im pazifischen Raum (rechte Kartenhälfte) ist gut zu erkennen. Bei einer Periode von $T = 80$ a erreicht $|B_r^c|$ Werte von 162 nT bzw. 156 nT, die nur geringfügig unter dem Wert 163.1 nT beim nichtleitenden Mantel liegen, und die Abweichungen vom Dipolfeld halten sich in engen Grenzen. Bei abnehmender Periode werden die Werte $|B_r^c|$ immer kleiner, weil die elektromagnetische Dämpfung zunimmt. Besonders interessant ist der Vergleich der Hemisphären. Zunächst nehmen die absoluten Unterschiede zwischen den Hemisphären von $T = 80$ a bis $T = 8$ a deutlich zu, während sie von $T = 8$ a zu $T = 0.8$ a wieder abnehmen. Wenn man nicht die absoluten Werte als Vergleichskriterium wählt, sondern die Struktur, dann hat man zwar immer noch zuerst ein Anwachsen der Unterschiede, aber dann keine Abnahme, sondern eher eine Stagnation, wie insbesondere der Vergleich der Verläufe von $|B_r^c|$ für $T = 2.5$ a und $T = 0.8$ a nahelegt.

Das globale Maximum von $|B_r^c|$ liegt im Zentrum der atlantischen Hemisphäre. Während beim nichtleitenden Mantel das Minimum auf dem Großkreis $\varphi = 90^\circ$ und $\varphi = 270^\circ$ liegt, wo $|B_r^c| = 0$ ist, verschiebt sich beim lateral inhomogenen Mantel die Lage des Minimums in die atlantische Hemisphäre. Das erkennt man, wenn man die beiden benachbarten Isolinien mit gleichen Werten von $|B_r^c|$ am Rand der atlantischen Hemisphäre betrachtet. Zwischen diesen Isolinien liegt das Minimum von $|B_r^c|$. Für $T = 8$ a sind das die beiden Isolinien mit $|B_r^c| = 20$ nT und für $T = 2.5$ a die Isolinien mit $|B_r^c| = 10$ nT. Im Zentrum der pazifischen Hemisphäre befindet sich ein lokales Maximum. Von dort aus nimmt $|B_r^c|$ bei den großen Perioden $T = 25$ a und $T = 8$ a zum Minimum hin monoton ab. Bei den kleineren Perioden $T = 2.5$ a und $T = 0.8$ a bildet sich in der pazifischen Hemisphäre ein lokales Minimum, nämlich zwischen den Isolinienpaaren $|B_r^c| = 17.2$ nT ($T = 2.5$ a) bzw. $|B_r^c| = 3.1$ nT ($T = 0.8$ a). In diesen Fällen nimmt $|B_r^c|$ am Rand der pazifischen Hemisphäre höhere Werte an als im Zentrum.

Die Werte der Amplitude $|B_r^c|$ in den Zentren der atlantischen und pazifischen Hemisphäre liefern durchaus charakteristische Werte, die man in einem größeren Periodenbereich miteinander vergleichen kann. Abbildung 5.5 zeigt die Werte für Perioden zwischen $T = 0.1$ a und $T = 1000$ a. Drei wichtige Bereiche sind zu unterscheiden. Bei sehr kleinen Perioden bis etwa $T = 0.25$ a schirmt der lateral inhomogene Mantel beide Bereiche fast vollständig ab. Für Perioden oberhalb von $T = 250$ a unterscheidet er sich praktisch kaum vom nichtleitenden Mantel. Interessant ist der mittlere Periodenbereich, in dem sich die Werte von $|B_r^c|$ in den Zentren teilweise erheblich unterscheiden. Dieser Periodenbereich wird in der oben beschriebenen Abbildung 5.4 abgedeckt.

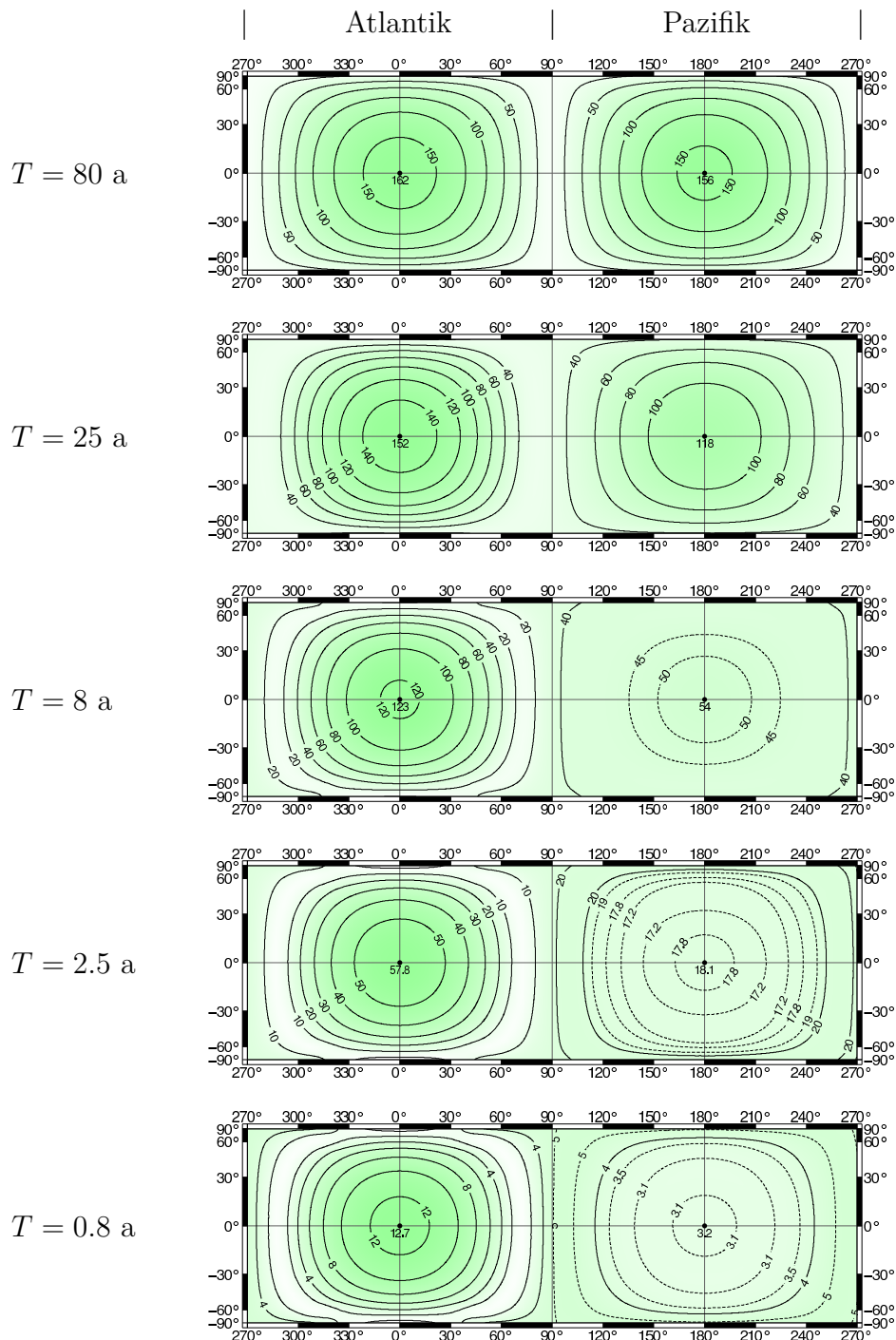


Abbildung 5.4: Die Karten zeigen die Isolinien der Amplitude $|B_r^c|$ in nT bei harmonischer Anregung mit verschiedenen Perioden T und mit $|G_1^1| = 500$ nT. In der pazifischen Hemisphäre (rechte Kartenhälfte) sind zusätzliche Isolinien gestrichelt eingezeichnet, weil die Werte teilweise kaum variieren.

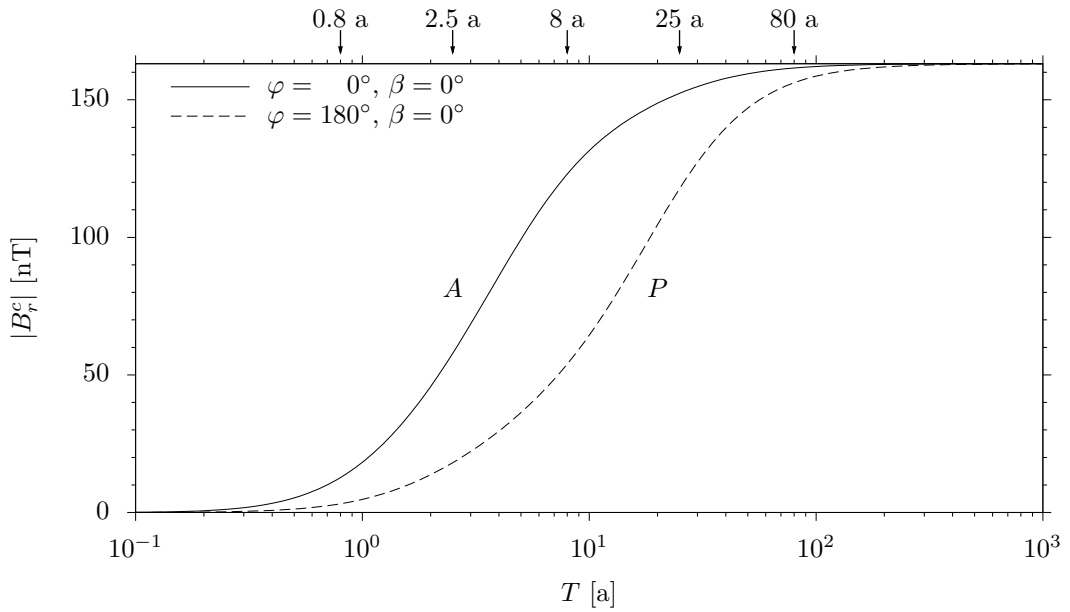


Abbildung 5.5: Die Werte von $|B_r^c|$ im Zentrum A der atlantischen Hemisphäre ($\varphi = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$) und im Zentrum P der pazifischen Hemisphäre ($\varphi = 180^\circ$, $\beta = 0^\circ$) sind für Perioden zwischen $T = 0.1$ a und $T = 1000$ a dargestellt. Am oberen Rand sind die Perioden markiert, für die Abbildung 5.4 Karten von $|B_r^c|$ zeigt.

Der Einfluß der lateral inhomogenen Schicht hängt nicht nur von der Periode des anregenden Feldes ab, sondern auch von ihrem Abstand zur Kern-Mantel-Grenze, der beim Modell $S\delta_2$ 210 km ($b = 3691$ km) beträgt. Aufgrund der Ergebnisse beim geschichteten Mantel mit einer zusätzlichen dünnen Schicht (vgl. Abschnitt 3.3) kann man erwarten, daß die elektromagnetische Dämpfung abnimmt, wenn die Schicht näher an die Kern-Mantel-Grenze verschoben wird, und Abbildung 5.6 bestätigt diese Einschätzung. Die Berechnung von $|B_r^c|$ erfolgt in diesem Fall abweichend für $b = 3531$ km, d. h. die Schicht ist nur 50 km von der Kern-Mantel-Grenze entfernt. Die Werte von $|B_r^c|$ für $T = 8$ a und $b = 3531$ km entsprechen ungefähr den Ergebnissen für $T = 25$ a bei Modell $S\delta_2$, mit dem Unterschied, daß zusätzlich die Differenz zwischen den Hemisphären geringer ausfällt, wenn die Schicht näher an der Kern-Mantel-Grenze liegt.

5.2.2 H_1^1 -Dipol

Die Amplitude der Radialkomponente $|B_r^c|$, die zum Dipol G_1^1 gehört, ist aufgrund der Rotationssymmetrie bezüglich der Dipolachse ein Spezialfall. Deswegen soll ergänzend der Dipol H_1^1 kurz betrachtet werden, der sowohl in der Ebene mit der Grenze zwischen den Hemisphären als auch in der Äquatorebene liegt. Man könnte ebenso den axialen G_1^0 -Dipol verwenden, denn die Ergebnisse sind abgesehen von einer Drehung um 90° vom Pol zum Äquator die gleichen. Hier wird der Dipol H_1^1 verwendet, weil die Maxima von $|B_r^s|$ auf dem Äquator liegen und ihre Umgebung in der Lambertschen flächentreuen Zylinderprojektion weniger verzerrt wird. Außerdem sind die Ergebnisse so optisch besser mit denen des G_1^1 -Dipols vergleichbar. Abbildung 5.7 zeigt die Karten von $|B_r^s|$ für die gleichen Perioden,

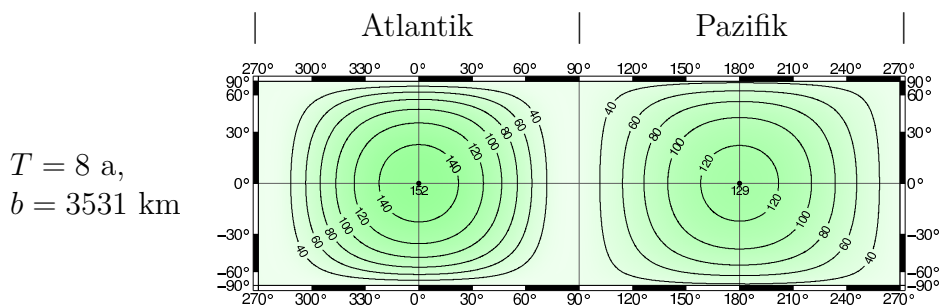


Abbildung 5.6: Die lateral inhomogene Schicht des Modells $S\delta_2$ ist nach $b = 3531$ km verschoben, sie liegt nur 50 km statt 210 km oberhalb der Kern-Mantel-Grenze. Der Vergleich mit der Karte für $T = 8$ a in Abbildung 5.4 zeigt, daß der Einfluß der lateral inhomogenen Schicht durch die Verschiebung deutlich abnimmt.

die bereits für $|B_r^c|$ betrachtet worden sind. Für die Periode $T = 80$ a unterscheidet sich Modells $S\delta_2$ in Bezug auf $|B_r^s|$ praktisch nicht vom nichtleitenden Mantel. Die Maxima liegen auf dem Äquator bei $\varphi = 90^\circ$ und $\varphi = 270^\circ$ und erreichen mit $|B_r^s| = 162$ nT fast den Wert von 163.1 nT, der aufgrund der geometrischen Abschwächung maximal erreicht werden kann. Bei kleineren Perioden wird das oszillierende Magnetfeld immer stärker gedämpft. Die Maxima von $|B_r^s|$ nehmen kontinuierlich ab, von 162 nT für $T = 80$ a sinken sie auf 149 nT, 105 nT, 45.7 nT und 10.1 nT für Perioden von 25 a, 8 a, 2.5 a bzw. 0.8 a. Außerdem macht sich die laterale Inhomogenität dadurch bemerkbar, daß das Dipolfeld aus der pazifischen Hemisphäre mit dem höheren Leitwert τ_p herausgedrängt wird, wie man besonders deutlich an der Lage der Maxima erkennen kann, die bei $T = 2.5$ a und $T = 0.8$ a um fast 25° in die atlantische Hemisphäre verschoben sind. Mit dem Herausdrängen geht einher, daß $|B_r^s|$ in der pazifischen Hemisphäre kleiner ist als in der atlantischen.

In den Amplituden $|B_r^c|$ und $|B_r^s|$ macht sich das Leitfähigkeitsmodell $S\delta_2$ erst bei Perioden unter $T = 80$ a deutlich bemerkbar. Abbildung 5.5 legt den Schluß nahe, daß sich das Modell spätestens bei Perioden oberhalb von $T = 250$ a überhaupt nicht mehr vom nichtleitenden Mantel unterscheiden läßt. Bei Perioden unterhalb von $T = 0.8$ a steigt die elektromagnetische Dämpfung in beiden Hemisphären so stark an, daß die laterale Inhomogenität nicht mehr ins Gewicht fällt. Zwar kann der Unterschied in $|B_r^c|$ bzw. $|B_r^s|$ zwischen den Hemisphären theoretisch auch bei noch kleineren Perioden an der Erdoberfläche beobachtbar sein, wenn nur die Feldstärke an der Kern-Mantel-Grenze ausreichend groß ist, aber ein solches Zusammentreffen von extrem kleiner Periode und extrem hoher Feldstärke ist äußerst unwahrscheinlich.

Obwohl die Dipole mit harmonischer Anregung vor allem betrachtet werden, um den Einfluß des Modells $S\delta_2$ zu illustrieren, kann man die Ergebnisse mit gewissen Einschränkungen auf den axialen Dipol G_1^0 während einer Feldumkehrung übertragen. Costin und Buffett (2004) gehen davon aus, daß der Betrag von G_1^0 im Verlauf von etwa 1000 a zunächst auf Null abnimmt und dann wieder auf den ursprünglichen Wert mit umgekehrtem Vorzeichen ansteigt, wobei Einschwingvorgänge nicht berücksichtigt werden. Betrachtet man den Realteil von G_1^0 , der bei harmonischer Anregung proportional zu $\cos(\omega t)$ ist, und

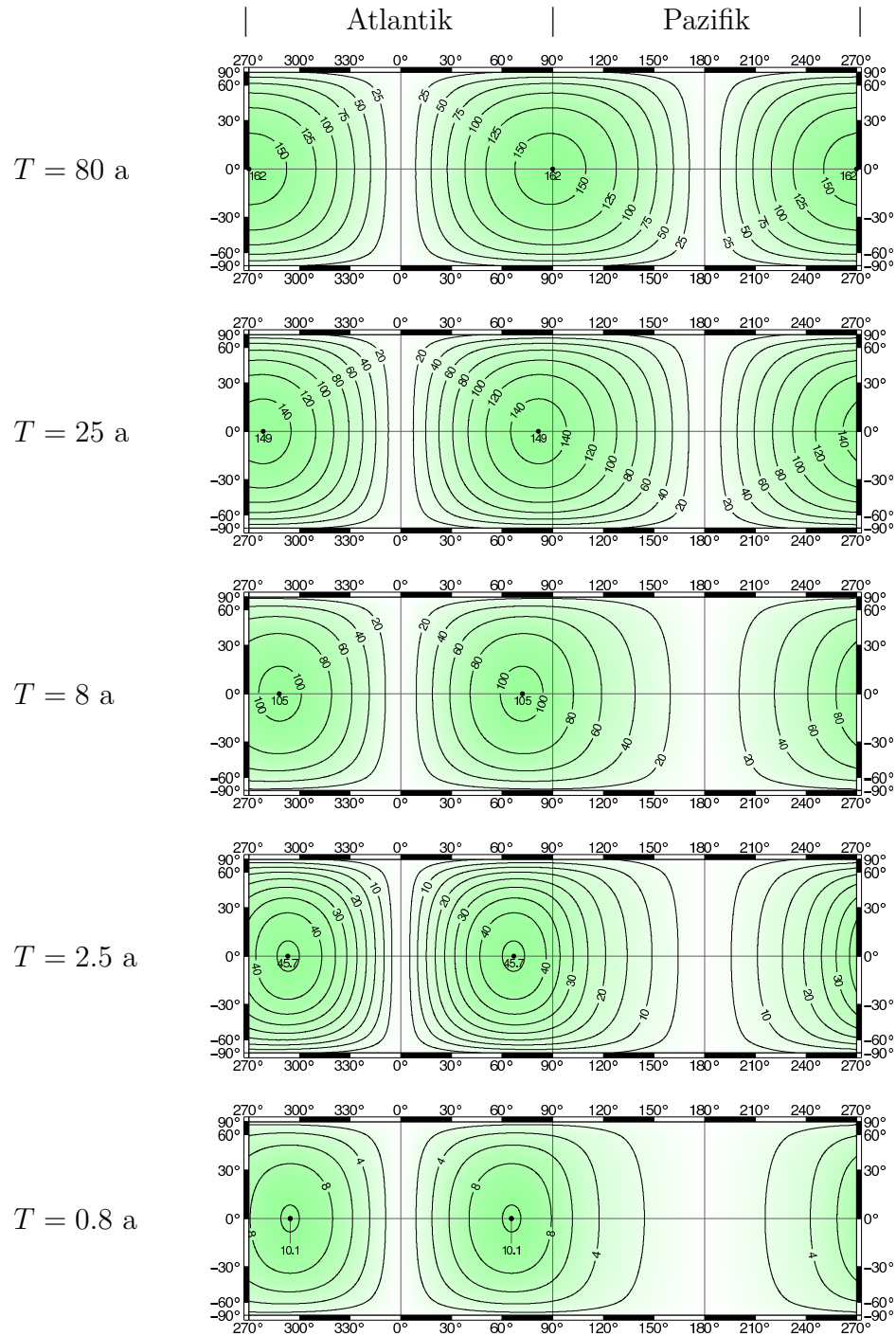


Abbildung 5.7: Die Karten zeigen die Isolinien von $|B_r^s|$ in nT bei harmonischer Anregung mit verschiedenen Perioden T und mit $|H_1^1| = 500$ nT.

vernachlässigt ebenfalls den Einschwingvorgang, so entspricht die Umpolung einer halben Periode, wobei die Periode in der Größenordnung von $T \approx 2000$ a liegt und damit weit oberhalb des Periodenbereichs, in dem sich die laterale Inhomogenität auf die Amplitude auswirkt.

Costin und Buffett (2004) setzen in ihrer Arbeit $dG_1^0/dt = \text{const.}$ an. Sie betrachten eine nur 1 km dünne Schicht direkt an der Kern-Mantel-Grenze, deren elektrische Leitfähigkeit sie mit Hilfe von Kugelflächenfunktionen vom Grad 2 angeben. Der Leitwert erreicht maximale Werte von $2 \cdot 10^8$ S. Im übrigen Mantel setzen sie $\sigma = 0$. Sie gehen davon aus, daß das Kernfeld nicht vom Mantel beeinflußt wird, weil die Schicht sehr dünn ist, andererseits aber Ströme in der Schicht induziert werden, die ein zusätzliches Magnetfeld erzeugen. Die Beiträge dieses induzierten Magnetfeldes führen nach Ansicht von Costin und Buffett (2004) dazu, daß man bevorzugte Polwanderkurven beobachtet. Das Ergebnis von Costin und Buffett (2004) steht im klaren Widerspruch zu den Ergebnissen dieser Arbeit, zumal die dort verwendete Schicht einen geringeren Einfluß haben sollte als das Modell $S\delta_2$, weil die Schicht zum einen kleinere Leitwerte hat und sich zum anderen unmittelbar an der Kern-Mantel-Grenze befindet. Dieser Widerspruch entsteht, weil Costin und Buffett (2004) Spiegelströme im Kern vernachlässigen, deren Magnetfeld das induzierte Magnetfeld der Schicht nahezu vollständig aufheben. Bei den Spiegelströmen handelt es sich um Flächenströme auf der Oberfläche des ideal leitenden Kerns, die formal sicherstellen, daß die Radialkomponente des induzierten Magnetfeldes an der Kern-Mantel-Grenze verschwindet (z. B. Jackson, 1999).

Bei einer Feldumkehrung nimmt das Dipolfeld zwar deutlich ab, aber es verschwindet vermutlich nicht ganz (z. B. Martin, 2000). Möglicherweise nimmt zunächst die Feldstärke signifikant ab, dann dreht das Dipolfeld von der alten in die neue Richtung, und schließlich nimmt die Feldstärke wieder zu (Merrill et al., 1996). Insofern ist ein sich drehender Dipol, wie er im folgenden Abschnitt betrachtet wird, vielleicht ein geeigneteres Modell für eine Feldumkehrung.

5.3 Rotierender Dipol

Am rotierenden Dipol wird der Einfluß des Modells $S\delta_2$ auf ein driftendes Magnetfeld untersucht. Teile des Erdmagnetfeldes zeigen eine deutliche Westdrift, die im gewichteten Mittel $0.25^\circ/\text{a}$ beträgt (Martin, 2000). Ursache dieser Westdrift ist die differentielle Bewegung der Flüssigkeitsströme im äußeren Kern und der darin „eingefrorenen“ Magnetfelder (Martin, 2000). Betrachtet man die Kugelflächenfunktionsdarstellung des Feldes, dann stammt der größte Beitrag von den Termen mit $n = m = 2$. Dieser Teil bewegt sich mit etwa $0.3^\circ/\text{a}$, entsprechend einer Periode von $T = 1200$ a (Stadelmann, 2004). Teilweise gibt es auch ostwärts gerichtetes Driftverhalten. Die Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen ist nur eine Möglichkeit, man kann das Phänomen alternativ durch die Westdrift eines exzentrischen Dipols modellieren, der sich mit Geschwindigkeiten zwischen $0.1^\circ/\text{a}$ und $0.4^\circ/\text{a}$ dreht (Strobach, 1991). Die Geschwindigkeitsschwankungen hängen möglicherweise über die elektromagnetische Kern-Mantel-Kopplung mit Tageslängenänderungen zusammen. Obwohl der sektorielle Quadrupol der Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen an der Erdoberfläche erheblich zur Westdrift beiträgt, muß man keineswegs als Anregung an

der Kern-Mantel-Grenze einen rotierenden sektoriellen Quadrupol verwenden, denn dieser wird aufgrund der lateralen Inhomogenität des Mantels ein kompliziertes Feld an der Erdoberfläche hervorbringen, das sich aus Beiträgen verschiedener Grade zusammensetzt. Aufgrund seiner Einfachheit ist für die Anregung der sektorielle Dipol die bessere Wahl. Ein rotierender Dipol kann darüber hinaus auch als einfaches Modell für das Feldverhalten während einer Feldumkehrung dienen, wenn man davon ausgeht, daß ein in der Intensität deutlich abgeschwächter axialer Dipol sich von einer Orientierung in die andere dreht. Geht man von einer typischen Zeitspanne von etwa 1000 a aus, dann entspricht dies einer Rotationsperiode von $T = 2000$ a. Allerdings bleiben transiente Vorgänge bei diesem einfachen Modell unberücksichtigt.

Die Verwendung eines rotierenden Dipols als Anregung schließt außerdem nahtlos an die Betrachtung der Amplituden der oszillierenden Dipole G_1^1 und H_1^1 im vorangegangenen Abschnitt an, denn durch die phasenversetzte Überlagerung dieser Dipole erhält man den rotierenden sektoriellen Dipol an der Kern-Mantel-Grenze, und die Berechnung der Radialkomponente B_r^{rot} an der Erdoberfläche, die zum rotierenden Dipol an der Kern-Mantel-Grenze gehört, ist trivial, wenn man die Felder B_r^c und B_r^s , die von G_1^1 bzw. H_1^1 hervorgerufen werden, bereits kennt. Es gilt

$$B_r^{\text{rot}} = \text{Re}(B_r^c + i B_r^s) . \quad (5.21)$$

Die komplexen Felder B_r^c und B_r^s werden dabei phasenverschoben addiert, wobei der Faktor $i = \exp(+i\pi/2)$ so gewählt ist, daß an der Kern-Mantel-Grenze der Dipol H_1^1 dem Dipol G_1^1 um $\pi/2$ vorausseilt. B_r^{rot} ist dann gleich dem Realteil dieser komplexen Summe und rotiert nach Westen.

Die graphische Darstellung der dynamischen Radialkomponente B_r^{rot} ist nicht so einfach wie die der Amplituden $|B_r^c|$ und $|B_r^s|$ zuvor. Die Grenzen zwischen den Hemisphären spielen für B_r^{rot} eine wichtige Rolle. Aus diesem Grund sind die Karten in diesem Abschnitt bei $\varphi = 0^\circ$ zentriert, so daß beide Grenzen ($\varphi = 90^\circ$ und $\varphi = 270^\circ$) innerhalb der Karte liegen. Die Karten zeigen also die gleiche Ansicht wie die Karte in Abbildung 5.2. Es hat sich als sehr hilfreich erwiesen, „normale Pole“ einzuzichnen. Dies sind die Pole des Dipolfeldes, das man erhält, wenn man die lateral inhomogene Schicht des Modells $S\delta_2$ mit den Leitwerten τ_A und τ_P durch ein homogene Schicht mit dem „normalen“ Leitwert $\tau_n = 2\tau_A\tau_P/(\tau_A + \tau_P)$ ersetzt. Die normalen Pole repräsentieren ungefähr die Orte, an denen sich das Maximum und das Minimum von B_r^{rot} ohne laterale Inhomogenität befänden. Die Wahl von τ_n als harmonisches Mittel hängt mit der Implementierung des verwendeten Programms zusammen. In den Abbildungen sind die normalen Pole als Punkte eingezeichnet.

Abbildung 5.8 vergleicht B_r^{rot} für Perioden von $T = 8$ a, 25 a, 80 a, 250 a und 800 a zu dem Zeitpunkt, an dem die normalen Pole die Grenze zwischen den Hemisphären von Osten nach Westen passieren. Je kürzer die Periode ist, desto größer sind die Abweichungen von einem Dipolfeld. Betrachtet man zunächst die Lage der Extrema, so fallen qualitative Ähnlichkeiten mit der Amplitude $|B_r^s|$ (vgl. Abbildung 5.7) auf. Beispielsweise liegen die Extrema für $T = 8$ a und $T = 25$ a innerhalb der atlantischen Hemisphäre, und insbesondere für $T = 8$ a wird $|B_r^{\text{rot}}|$ in der pazifischen Hemisphäre deutlich stärker gedämpft als in der atlantischen. Neu sind Verzerrungen, die durch die Rotation entstehen und die ein schönes Beispiel für die Lenzsche Regel liefern. Bei $\varphi = 270^\circ$ wird B_r^{rot}

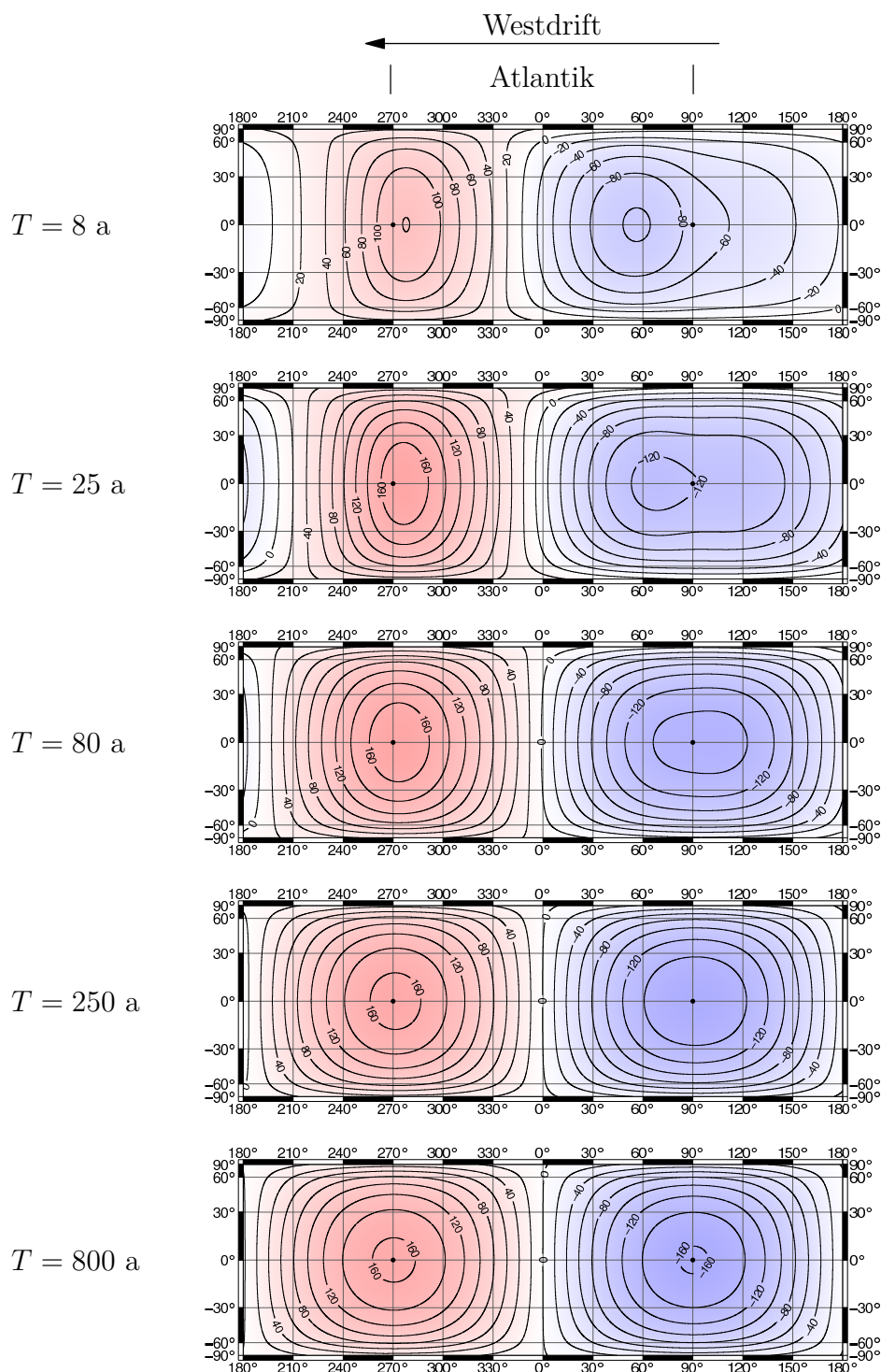


Abbildung 5.8: Die Karten zeigen B_r^{rot} in nT für verschiedene Perioden T zu dem Zeitpunkt, an dem der normale magnetische Nordpol bei $\varphi = 270^\circ$ und der Südpol bei $\varphi = 90^\circ$ liegt. Das Feld bewegt sich nach Westen. Die atlantische Hemisphäre befindet sich in der Kartenmitte.

in Rotationsrichtung gestaucht und bei $\varphi = 90^\circ$ gestreckt. Die Verzerrungen machen sich auch noch bemerkbar, wenn $|B_r^{\text{rot}}|$ praktisch die Werte erreicht, die die geometrische Abschwächung maximal zuläßt. Selbst bei $T = 800$ a kann man bei genauer Betrachtung der Isolinien $|B_r^{\text{rot}}| = 160$ nT erkennen, daß $|B_r^{\text{rot}}|$ bei $\varphi = 270^\circ$ etwas größere Werte erreicht als bei $\varphi = 90^\circ$. Diese Feinheiten dürften praktisch allerdings keine Rolle spielen. Man kann davon ausgehen, daß sich Modell S δ_2 für Perioden länger als 250 a kaum vom nichtleitenden Mantel unterscheidet. Wenn der Erdmantel nicht deutlich höhere elektrische Leitfähigkeiten als Modell S δ_2 aufweist, kann man ausschließen, daß er merklichen Einfluß auf das Feld der Westdrift oder einer Feldumkehrung ausübt, weil die Periode der Westdrift mit 1200 a und die Dauer einer Feldumkehrung von etwa 1000 a für die Drehung um 180° weit über der Periode von $T = 250$ a liegen.

Die Verzerrungen von B_r^{rot} lassen sich anhand der Bewegung des Feldes leicht erklären. Die Abbildungen 5.9 bis 5.11 zeigen für die Perioden $T = 8$ a, $T = 25$ a bzw. $T = 80$ a Momentaufnahmen von B_r^{rot} im zeitlichen Abstand von jeweils 1/24-tel Periode. In dieser Zeit bewegen sich die normalen Pole um 15° nach Westen. Die Abbildungen umfassen jeweils eine halbe Periode, an deren Ende der Anfangszustand mit umgekehrten Vorzeichen erreicht wird. Da sich die anschließende halbe Periode nur im Vorzeichen von der vorangegangenen unterscheidet, ist sie nicht dargestellt.

Bei der Periode $T = 8$ a (Abbildung 5.9) sind die zwei Haupteigenschaften von B_r^{rot} gut zu erkennen, die sich zum einen in der bereits bekannten stärkeren Dämpfung in der pazifischen Hemisphäre und zum anderen in den Verzerrungen manifestieren, die auftreten, wenn die normalen Pole die Grenzen zwischen den Hemisphären überschreiten. Die stärkere Abschirmung in der pazifischen Hemisphäre wird von der Karte oben links in Abbildung 5.9 dokumentiert, bei der der normale Nordpol bei $\varphi = 0^\circ$ liegt.

Die unterschiedlichen Vorgänge beim Wechsel zwischen den Hemisphären lassen sich am besten getrennt untersuchen. Verfolgt man zunächst, wie sich der normale Nordpol von $\varphi = 0^\circ$ nach Westen bewegt, so erkennt man, wie die Isolinien von B_r^{rot} in seiner Umgebung immer stärker zusammengedrängt werden, während er sich der Grenze bei $\varphi = 270^\circ$ nähert und sie schließlich überschreitet. Während dieses Prozesses nimmt das Maximum von B_r^{rot} zunächst geringfügig ab, steigt dann kurz wieder an, wenn der normale Pol die Grenze überquert und die Isolinien besonders stark gestaucht werden, und sinkt danach stark. Betrachtet man als nächstes den Verlauf des Feldes um das Minimum, so zeigt sich ein ganz anderes Bild. Die erste Karte von Abbildung 5.9 zeigt den Zeitpunkt, zu dem der normale Südpol im Zentrum der pazifischen Hemisphäre bei $\varphi = 180^\circ$ liegt. Es fällt auf, daß das Minimum nicht so ausgeprägt ist wie das Maximum. Während der normale Südpol nach Westen vorrückt, bildet sich an der Grenze zwischen den Hemisphären bei $\varphi = 90^\circ$ das Minimum von B_r^{rot} aus, lange bevor der normale Pol dort ankommt. Das Minimum nimmt immer kleinere Werte an, bis es in der Nähe von $\varphi = 0^\circ$ die kleinsten Werte (während dieser Halbperiode) annimmt. Die weit in die pazifische Hemisphäre hineinreichenden Isolinien, die den Bereich um das Minimum sehr langgestreckt erscheinen lassen, sind besonders auffällig. Es sieht so aus, als ob B_r^{rot} in der pazifische Hemisphäre „festhinge“.

Stauchung und Streckung der Isolinien von B_r^{rot} sind Ausdruck der Lenzschen Regel. Beim Übergang des Feldes in den besseren elektrischen Leiter unter dem Pazifik werden Ströme induziert, die dem Eindringen entgegenwirken. Das führt zum Aufstauen der Isolinien von B_r^{rot} an der Grenze. Beim Verlassen des besseren elektrischen Leiters werden

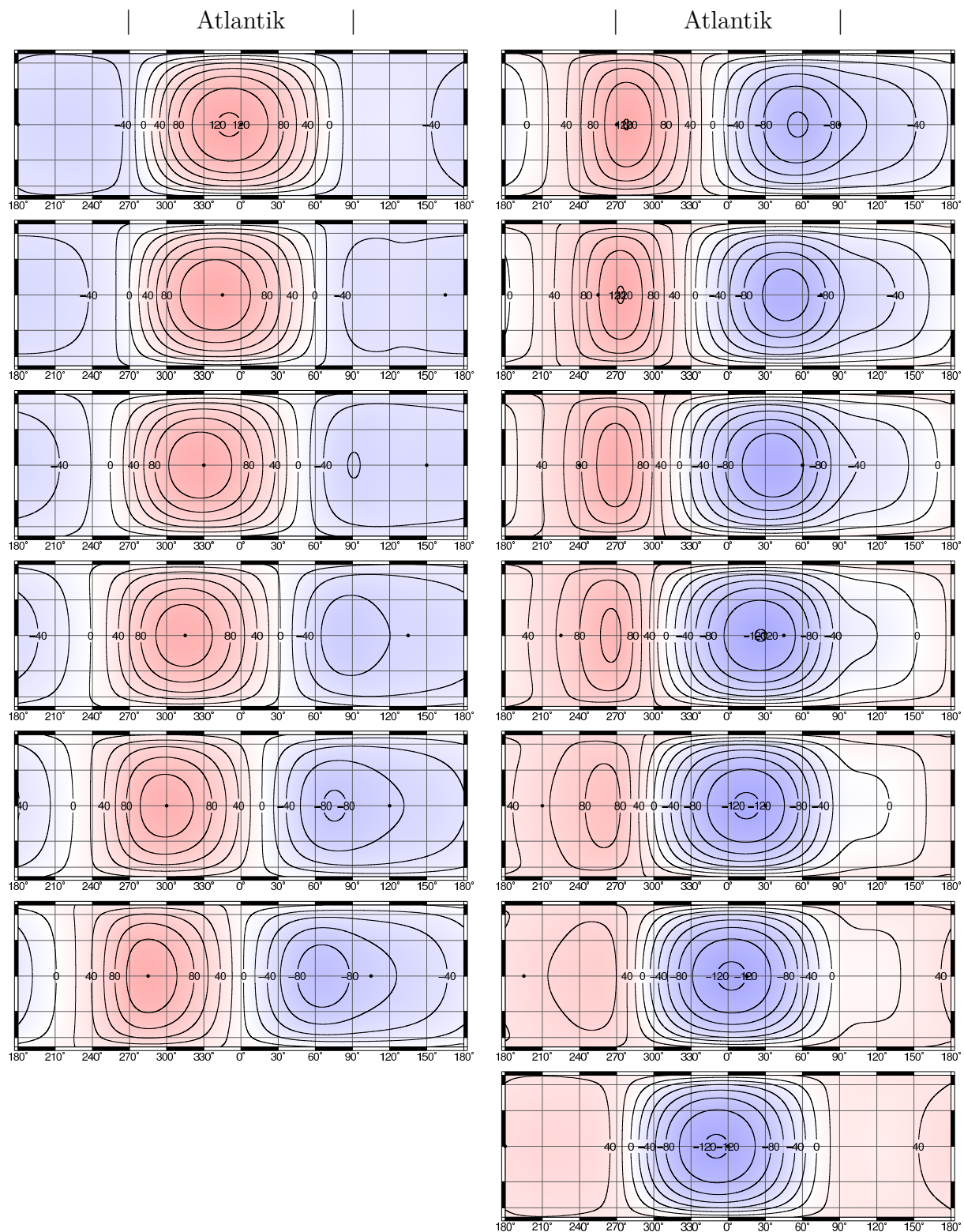


Abbildung 5.9: Die Karten zeigen B_r^{rot} in nT für die Periode $T = 8$ a in Abständen von $1/24$ -tel Periode (von oben nach unten und von links nach rechts).

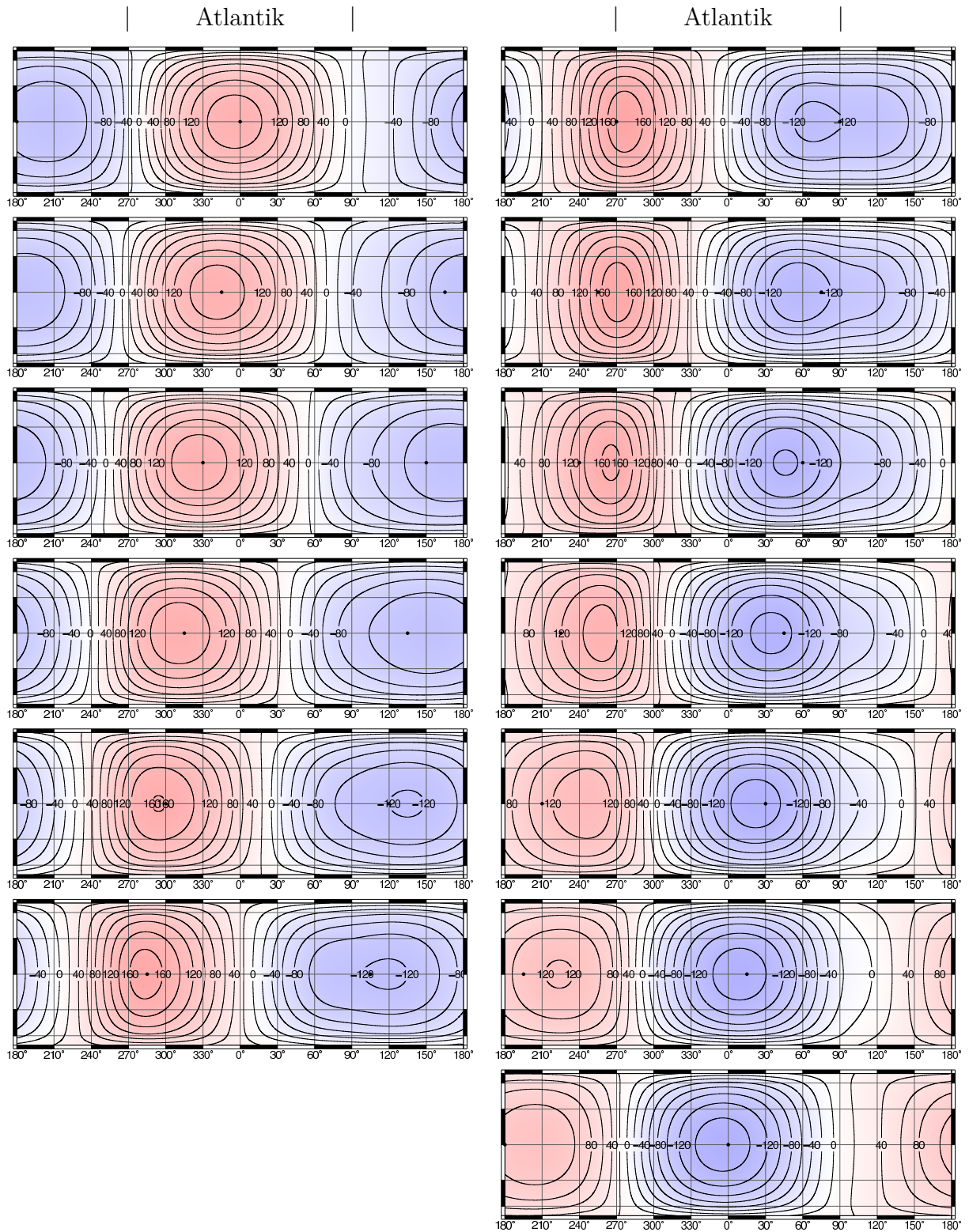


Abbildung 5.10: B_r^{rot} in nT wie in Abbildung 5.9, aber für die Periode $T = 25$ a

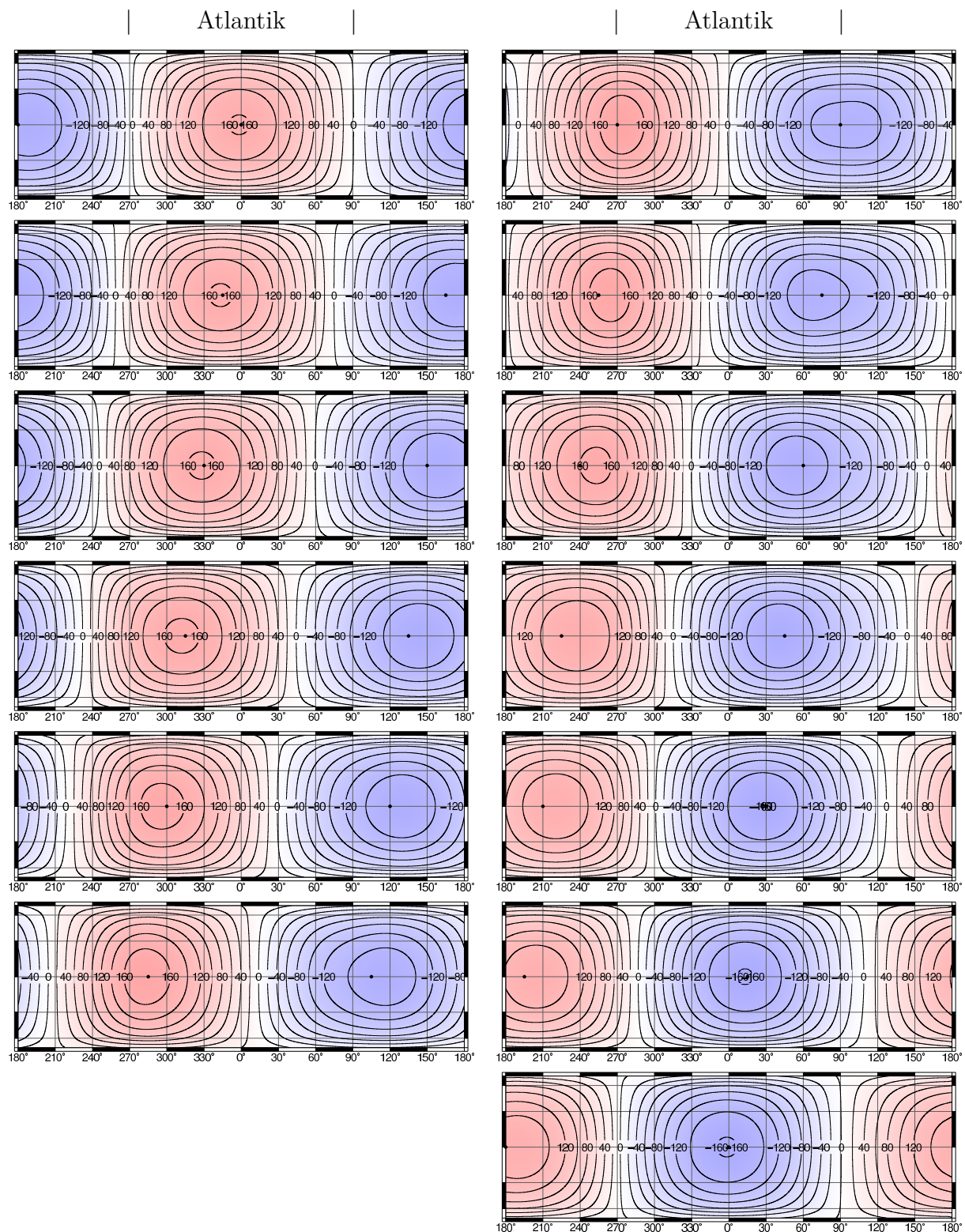


Abbildung 5.11: B_r^{rot} in nT wie in den Abbildungen 5.9 und 5.10, aber für die Periode $T = 80$ a

andererseits Ströme induziert, die dem Herausdriften entgegenwirken, so daß die Isolinien in die Länge gezogen werden. Zwar werden im schlechteren elektrischen Leiter im Bereich der atlantischen Hemisphäre ebenfalls Ströme induziert, aber im besseren Leiter werden größere Ströme hervorgerufen, deren Auswirkungen dominieren.

Beim Vergleich von B_r^{rot} bei den Perioden $T = 8$ a, $T = 25$ a und $T = 80$ a (Abbildungen 5.9 bis 5.11) sieht man, daß die anhand von $T = 8$ a beschriebenen Merkmale bei längeren Perioden in immer geringerem Maße auftreten. Sowohl die Unterschiede im Betrag von B_r^{rot} zwischen den Hemisphären als auch die Stauchung bzw. Streckung der Isolinien von B_r^{rot} an den Grenzen zwischen den Hemisphären fallen bei den größeren Perioden immer schwächer aus. Die Verzerrung der Isolinien ist am ausgeprägtesten, wenn die normalen Pole gerade die Grenze zwischen den Hemisphären überschreiten (jeweils in der Karte oben rechts zu sehen). Dieser Moment ist für die Perioden $T = 8$ a, $T = 25$ a, $T = 80$ a, $T = 250$ a und $T = 800$ a oben bereits diskutiert worden (vgl. auch Abbildung 5.8). Die stärkere elektromagnetische Dämpfung im Bereich der pazifischen Hemisphäre ist an den Beispielen der oszillierenden Dipole im vorangegangenen Abschnitt bereits untersucht worden.

5.4 Statistisches Restfeld

Die vorangegangenen Abschnitte haben Dipole behandelt, die mit verschiedenen festen Frequenzen oszillieren bzw. rotieren, weil der Einfluß der lateralen Inhomogenität des Modells $S\delta_2$ in diesen einfachen Fällen klar erkennbar ist. In diesem Abschnitt soll das Verhalten des Restfeldes untersucht werden. Dazu wird die Radialkomponente des Restfeldes an der Kern-Mantel-Grenze durch die Gauß-Koeffizienten $G_n^m(t)$ und $H_n^m(t)$, $2 \leq n \leq 10$, beschrieben, bei denen es sich um stationäre Gauß-Prozesse handelt (siehe Kapitel 4). Der Dipolanteil bleibt unberücksichtigt, weil er insbesondere aufgrund seiner dominierenden Komponente ungefähr parallel zur Rotationsachse eine Sonderstellung einnimmt. Für Modell $S\delta_2$ soll untersucht werden, ob es für das Restfeld zu einer signifikanten Änderungen des zu erwartenden Unterschieds zwischen den Hemisphären an der Erdoberfläche kommen kann. Als Maß für den Unterschied wird die Differenz der über die atlantische bzw. pazifische Hemisphäre gemittelten Werte von B_r^2 des Restfeldes verwendet. Dies Maß gilt als besonders empfindlich (Walker und Backus, 1996) .

Als erstes werden für das Restfeld die beobachteten Unterschiede in B_r und B_r^2 zwischen der atlantischen und pazifischen Hemisphäre für den Zeitraum der letzten 100 Jahre betrachtet. Es zeigt sich, daß B_r^2 gemittelt über die pazifische Hemisphäre kleiner ist als gemittelt über die atlantische Hemisphäre. Auch die Säkularvariation ist in der pazifischen Hemisphäre niedriger als in der atlantischen. Als mögliche Ursache wird über eine höhere elektrische Leitfähigkeit im pazifischen Raum spekuliert, die zu einer stärkeren elektromagnetischen Dämpfung der Säkularvariation führt. Wenn die Säkularvariation im pazifischen Raum stärker gedämpft wird, dann sind – zumindest im Mittel – auch die Beträge und B_r^2 des Magnetfeldes dort kleiner.

Anschließend wird das rotationsinvariante statistische Modell von Constable und Parker (1988), das auch von Walker und Backus (1996) benutzt wird, nachvollzogen und leicht modifiziert. Eine geringfügig andere Herangehensweise ist notwendig, weil sowohl Cons-

table und Parker (1988) als auch Walker und Backus (1996) zumindest implizit von einem nichtleitenden Mantel ausgehen. Zugleich können neuere Daten des IGRF 2005 verwendet werden. Außerdem wird kritisch hinterfragt, ob die Unterschiede zwischen den Hemisphären tatsächlich signifikant sind, wie Walker und Backus (1996) annehmen. Abschließend soll mit Hilfe einer statistischen Anregung an der Kern-Mantel-Grenze abgeschätzt werden, ob die laterale Inhomogenität des Modells $S\delta_2$ zu einem merklichen Unterschied zwischen den Hemisphären führen kann.

5.4.1 B_r^2 des IGRF

Abbildung 5.12 zeigt die Radialkomponente B_r des Restfeldes an der Erdoberfläche berechnet für das IGRF (*International Geomagnetic Reference Field*) der Jahre 1905, 1955 und 2005 unter Verwendung der Grade $2 \leq n \leq 10$, d. h.

$$B_r = \sum_{n=2}^{10} (n+1) \sum_{m=0}^n \left[g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi) \right] P_n^m(\cos \vartheta) , \quad (5.22)$$

wobei die Gauß-Koeffizienten g_n^m und h_n^m des IGRF der jeweiligen Epoche eingesetzt werden. Verwendet werden die Gauß-Koeffizienten, die von der IAGA (*International Association of Geomagnetism and Aeronomy*) in der zehnten Generation des IGRF zur Verfügung gestellt werden. B_r ist im folgenden die Radialkomponente des Restfeldes ($2 \leq n \leq 10$), wenn nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist. B_r besitzt insbesondere im Fall des IGRF 2005 vier markante Extrema, von denen zwei fast vollständig in der atlantischen Hemisphäre, eines fast vollständig in der pazifischen Hemisphäre und eines in der pazifischen Hemisphäre direkt an der Grenze zur atlantischen Hemisphäre liegen (Abbildung 5.12). Im Verlauf von 100 a ist das Restfeld stärker geworden und hat sich leicht nach Westen verschoben. Seine Intensität ist im atlantischen Raum größer als im pazifischen Raum.

Die Karte in Abbildung 5.13 zeigt B_r einschließlich des dominierenden Dipolanteils. Die Extrema des Restfeldes führen offensichtlich zu Anomalien im Südatlantik, in Sibirien und südlich von Australien, wobei die Anomalie im Südatlantik besonders ausgeprägt ist.

Walker und Backus (1996) verwenden in ihrer Arbeit B_r^2 . Sie mitteln zunächst B_r^2 über die atlantische (Index A) bzw. pazifische (Index P) Hemisphäre,

$$\langle B_r^2 \rangle_A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\pi B_r^2(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad (5.23)$$

und

$$\langle B_r^2 \rangle_P = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^\pi B_r^2(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi , \quad (5.24)$$

und bilden anschließend die Differenz

$$\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P . \quad (5.25)$$

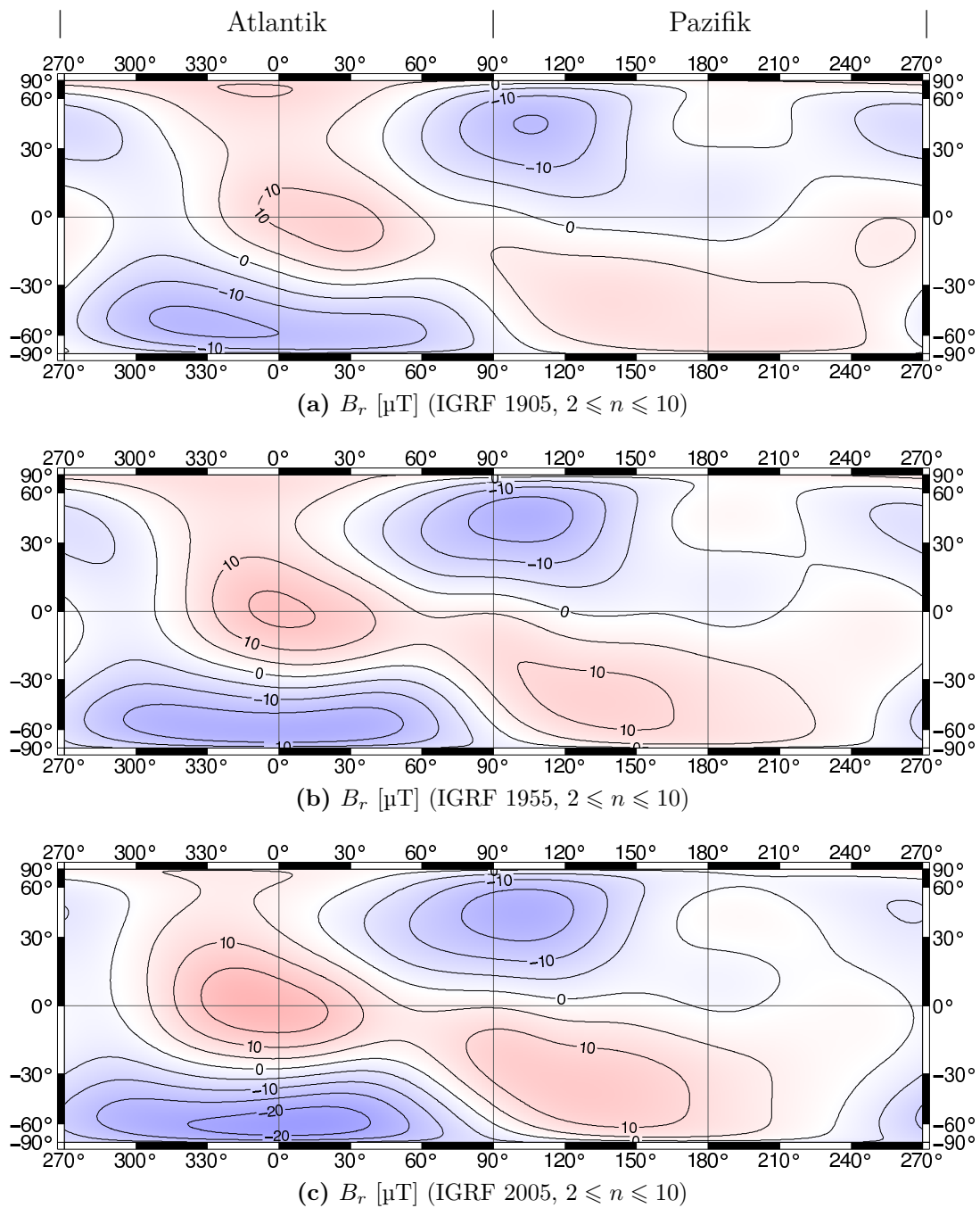


Abbildung 5.12: Die Extrema der Radialkomponente B_r des Restfeldes, $2 \leq n \leq 10$ haben sich im Lauf von 100 a verstärkt, wie der Vergleich des IGRF der Jahre 1905, 1955 und 2005 zeigt. Die atlantische Hemisphäre ist die linke Kartenhälfte, die pazifische Hemisphäre die rechte.

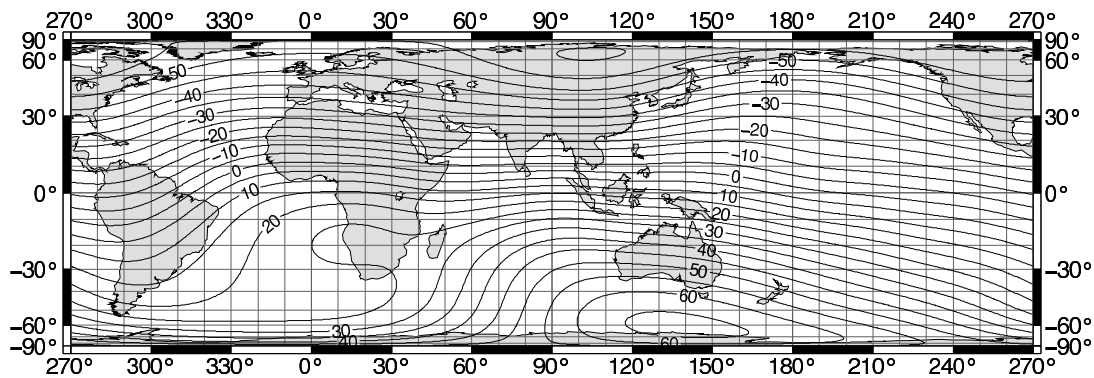


Abbildung 5.13: B_r [μT] (IGRF 2005, $1 \leq n \leq 10$)

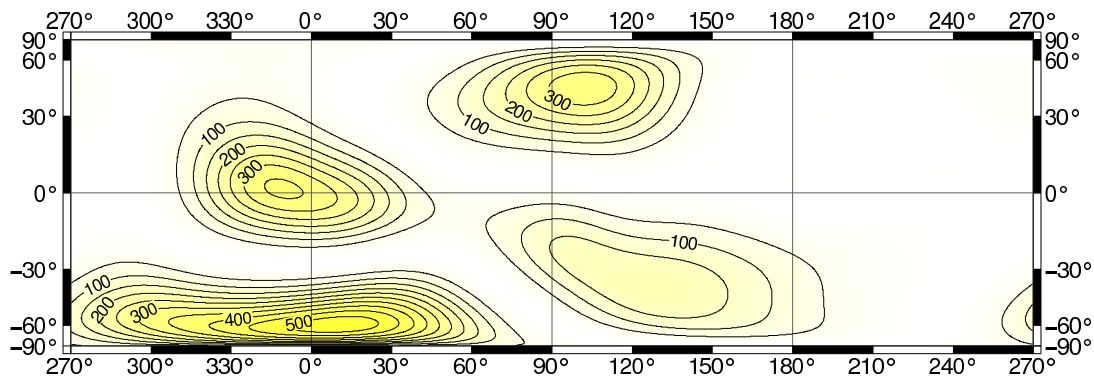


Abbildung 5.14: B_r^2 [μT^2] (IGRF 2005, $2 \leq n \leq 10$)

Sie werfen die Frage auf, ob rotationsinvariante statistische Modelle für das Erdmagnetfeld vereinbar sind mit der Differenz $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$, die sie aus Magsat-Daten von 1980 berechnen.

Die Verwendung von B_r^2 betont die vier Extrema, die B_r besitzt (vgl. Abbildung 5.12), wie Abbildung 5.14 zeigt. Die Werte von $\langle B_r^2 \rangle_A$ und $\langle B_r^2 \rangle_P$ für das IGRF von 1900 bis 2005 werden in Abbildung 5.15 verglichen. $\langle B_r^2 \rangle_A$ ist in diesem Zeitraum deutlich schneller angestiegen als $\langle B_r^2 \rangle_P$, allerdings ist das Verhältnis $\langle B_r^2 \rangle_A / \langle B_r^2 \rangle_P \approx 2$ nahezu konstant geblieben. Für das IGRF 2005 ist die Differenz

$$\Delta_{\text{IGRF}} := \langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P \approx 53.7 \mu\text{T}^2. \quad (5.26)$$

Der Unterschied zwischen $\langle B_r^2 \rangle_A$ und $\langle B_r^2 \rangle_P$ ist auffällig, und es stellt sich die Frage, ob er zufällig zustande kommen kann. Das soll im folgenden genauer untersucht werden, indem die Nullhypothese $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = 0$ getestet wird (Walker und Backus, 1996).

5.4.2 Rotationsinvariantes statistisches Modell

Das rotationsinvariante statistische Modell für das Restfeld folgt im wesentlichen der Vorgehensweise von Constable und Parker (1988) bzw. Walker und Backus (1996). Beim rotationsinvarianten Modell hängen die Werte von B_r^2 im Mittel nicht von φ und ϑ ab.

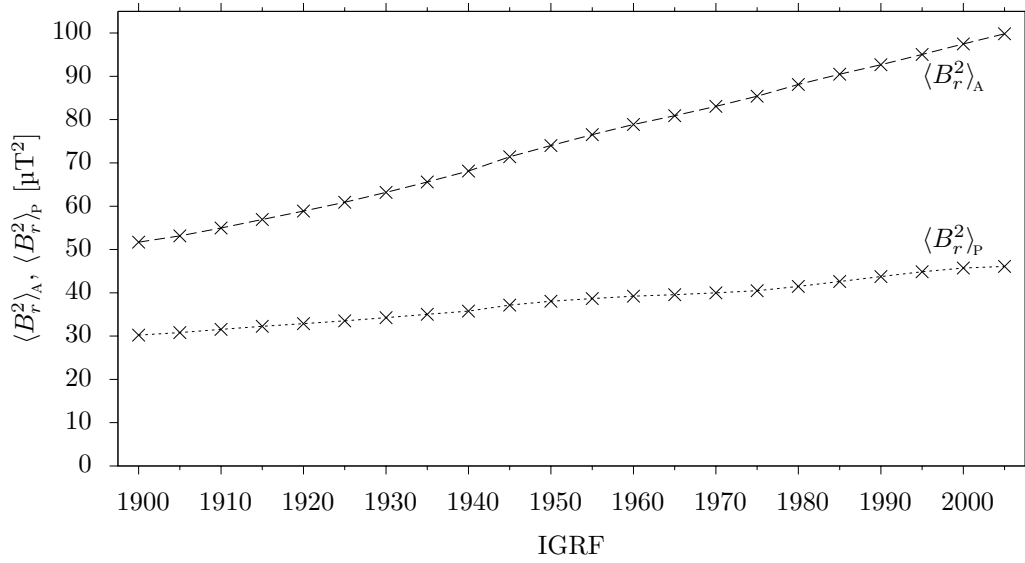


Abbildung 5.15: Entwicklung von $\langle B_r^2 \rangle_A$ und $\langle B_r^2 \rangle_P$ für die Jahre von 1900 bis 2005, berechnet aus dem IGRF

Insbesondere existieren keine Unterschiede zwischen zwei Hemisphären, etwa durch ausgeprägte laterale Inhomogenitäten der elektrischen Leitfähigkeit des Mantels.

Es wird gefordert, daß die Gauß-Koeffizienten für $2 \leq n \leq 10$ normalverteilt und unabhängig sind mit

$$E[g_n^m] = E[h_n^m] = 0, \quad (5.27)$$

$$\text{Var}[g_n^m] = \text{Var}[h_n^m] = \sigma_n^2 \quad (5.28)$$

(wie in Abschnitt 4.2, Gleichungen 4.16 und 4.17). Für das Mauersberger-Lowes-Spektrum M_n des Modells gilt

$$E[M_n] = (n+1) \sum_{m=0}^n \left\{ E[(g_n^m)^2] + E[(h_n^m)^2] \right\} = (n+1) (2n+1) \sigma_n^2. \quad (5.29)$$

Dies Ergebnis kann auch aus der χ^2 -Verteilung erhalten werden. Sie ist definiert durch

$$\chi^2 := \sum_{k=1}^{\ell} X_k^2 \quad (5.30)$$

mit unabhängigen $X_k \in \mathcal{N}(0, \sigma)$. Für ihren Erwartungswert und ihre Varianz gelten

$$E[\chi^2] = \ell \sigma^2 \quad \text{bzw.} \quad \text{Var}[\chi^2] = 2 \ell \sigma^4. \quad (5.31)$$

Es ist eine Verteilung mit ℓ Freiheitsgraden, entsprechend der Tatsache, daß χ^2 eine Summe von ℓ unabhängigen Summanden ist (Fisz, 1958). Das Mauersberger-Lowes-Spektrum M_n ist folglich χ^2 -verteilt mit $2n+1$ Freiheitsgraden, und seine Varianz ist

$$\text{Var}[M_n] = 2 (2n+1) (n+1)^2 \sigma_n^4, \quad (5.32)$$

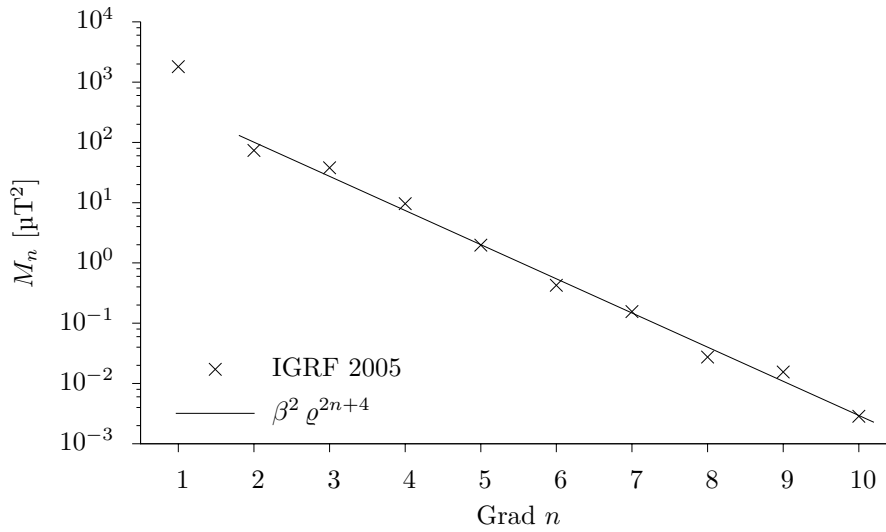


Abbildung 5.16: Das Mauersberger-Lowes-Spektrum, hier berechnet für das IGRF 2005, ist bis auf den Faktor $1/(2\mu_0)$ gleich der mittleren Energiedichte des Magnetfeldes auf der Erdoberfläche.

wobei $\text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X]$ für eine beliebige Zufallsvariable X und $a = \text{const.}$ berücksichtigt ist. Zur Bestimmung von σ_n machen sowohl Constable und Parker (1988) als auch Walker und Backus (1996) Annahmen über das Mauersberger-Lowes-Spektrum an der Kern-Mantel-Grenze, wobei sie implizit annehmen, daß die elektrische Leitfähigkeit des Mantels vernachlässigt werden kann. Diese Annahme verbietet sich, wenn man prüfen möchte, ob die Leitfähigkeit des Mantels sich möglicherweise bemerkbar macht. Deshalb wird hier lediglich festgestellt, daß sich das Mauersberger-Lowes-Spektrum für $2 \leq n \leq 10$ in der logarithmischen Darstellung (Abbildung 5.16) sehr gut durch eine Gerade annähern läßt. Eine Anpassung für das IGRF 2005 liefert

$$M_n = \beta^2 \varrho^{2n+4} \quad \text{mit } \beta = 136.6 \text{ } \mu\text{T} \text{ und } \varrho = 0.5207 . \quad (5.33)$$

Verlangt man, daß das rotationsinvariante statistische Modell im Mittel das gleiche Mauersberger-Lowes-Spektrum besitzen soll, also

$$\mathbb{E}[M_n] = \beta^2 \varrho^{2n+4} , \quad (5.34)$$

dann sind schließlich die Varianzen σ_n^2 der Gauß-Koeffizienten festgelegt durch

$$\sigma_n^2 = \beta^2 \frac{\varrho^{2n+4}}{(n+1)(2n+1)} . \quad (5.35)$$

5.4.3 Erwartungswert und Varianz von B_r^2

In diesem Abschnitt wird für das rotationsinvariante statistische Modell untersucht, welche Abweichungen von $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P = 0$ statistisch zu erwarten sind. Denn obwohl wegen der Rotationsinvarianz im Mittel $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P = 0$ gilt, treten im konkreten Einzelfall zufällige Abweichungen davon auf. Diese Information ist wichtig, um beurteilen zu

können, ob sich der Einfluß eines lateral inhomogenen Mantels überhaupt von zufälligen Schwankungen unterscheiden läßt.

B_r^2 muß über die atlantische und die pazifische Hemisphäre gemittelt werden. Die Ausdrücke, die man dabei erhält, lassen sich mit Hilfe des Mittels über die gesamte Oberfläche vereinfacht ausdrücken. Aus diesem Grund wird als erstes das Mittel von B_r^2 über die Erdoberfläche berechnet, das in enger Beziehung zum Mauersberger-Lowes-Spektrum steht. Nach der Mittelung von B_r^2 über die Hemisphären können der Erwartungswert $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ und die Varianz $\text{Var}[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ für das rotationsinvariante statistische Modell des vorangegangenen Abschnitts exakt angegeben werden. Lediglich die Verteilungsfunktion von $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$ muß am Ende dieses Abschnitts empirisch ermittelt werden.

B_r^2 gemittelt über die Erdoberfläche

Die Mittelung von B_r^2 für gegebene Gauß-Koeffizienten über die gesamte Erdoberfläche ($r = a$) ist sehr einfach. Für einen gegebenen Grad n gilt

$$B_{nr} = (n+1) \sum_{m=0}^n \left[g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi) \right] P_n^m(\cos \vartheta) \quad (5.36)$$

und

$$B_{nr}^2 = (n+1)^2 \left\{ \sum_{m=0}^n \left[g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi) \right] P_n^m(\cos \vartheta) \right\} \left\{ \sum_{m'=0}^{n'} \left[g_{n'}^{m'} \cos(m'\varphi) + h_{n'}^{m'} \sin(m'\varphi) \right] P_{n'}^{m'}(\cos \vartheta) \right\}. \quad (5.37)$$

Die Mittelung über die Kugeloberfläche ist definiert durch

$$\langle B_{nr}^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi B_{nr}^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (5.38)$$

Aufgrund der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen und

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[P_n^m(\cos \vartheta) \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix} \right]^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} \quad (5.39)$$

(z. B. Joos, 1989, 1. Buch, Kap. 5, §4), wobei hier die Schmidtsche Normierung verwendet wird, folgt sofort

$$\langle B_{nr}^2 \rangle = \frac{(n+1)^2}{2n+1} \sum_{m=0}^n \left[(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right]. \quad (5.40)$$

Der Vergleich mit Gleichung (4.18) zeigt, daß

$$\langle B_{nr}^2 \rangle = \frac{n+1}{2n+1} M_n \quad (5.41)$$

gilt, schließlich ist das Mauersberger-Lowes-Spektrum aus der Mittelung von \mathbf{B}^2 über die Erdoberfläche hervorgegangen (Mauersberger, 1956; Lowes, 1966), d. h. es ist $M_n = \langle \mathbf{B}_n^2 \rangle$. Summiert man die Beiträge nur des Restfeldes ($2 \leq n \leq 10$), dann folgt wegen der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen

$$\langle B_r^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{n=2}^{10} B_{nr} \right)^2 \right\rangle = \sum_{n=2}^{10} \langle B_{nr}^2 \rangle = \sum_{n=2}^{10} \frac{n+1}{2n+1} M_n . \quad (5.42)$$

Erwartungswert und Varianz von $\langle B_r^2 \rangle$ für das rotationsinvariante statistische Modell können durch die Erwartungswerte und Varianzen von M_n ausgedrückt werden, es ist

$$E[\langle B_r^2 \rangle] = \sum_{n=2}^{10} \frac{n+1}{2n+1} E[M_n] = \sum_{n=2}^{10} (n+1)^2 \sigma_n^2 \quad \text{und} \quad (5.43)$$

$$\text{Var}[\langle B_r^2 \rangle] = \sum_{n=2}^{10} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^2 \text{Var}[M_n] = 2 \sum_{n=2}^{10} \frac{(n+1)^4}{2n+1} \sigma_n^4 . \quad (5.44)$$

B_r^2 gemittelt über eine Hemisphäre

Die Mittelung von B_r^2 über die gesamte Kugeloberfläche ist dank der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen einfach und führt zu kompakten Ergebnissen. Wird B_r^2 nur über eine Hemisphäre gemittelt, dann hilft die Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen nur eingeschränkt, und man kann nicht erwarten, daß die Ergebnisse so übersichtlich bleiben.

Bei der Wahl der Hemisphären ist man frei, weil man die Gauß-Koeffizienten gegebenenfalls in ein gedrehtes Koordinatensystem transformieren kann. Es bietet sich an, eine Aufteilung in eine nördliche und eine südliche Hemisphäre zu verwenden, weil man so die Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus unmittelbar ausnutzen kann. Im folgenden werden die Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) \sin(m'\varphi) d\varphi = 0 \quad \text{für alle } m, m', \quad (5.45)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) \cos(m'\varphi) d\varphi = \begin{cases} 2\pi & m = m' = 0 \\ \pi & m = m' > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad (5.46)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) \sin(m'\varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi & m = m' > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.47)$$

verwendet. Die Mittelung über die nördliche Hemisphäre ist gegeben durch

$$\langle B_r^2 \rangle_N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} B_r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi . \quad (5.48)$$

Setzt man die Kugelflächenfunktionsentwicklung von B_r für das Restfeld (Gleichung 5.22) ein, so ist

$$\begin{aligned} \langle B_r^2 \rangle_N = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=2}^{10} \sum_{n'=2}^{10} (n+1)(n'+1) \\ & \sum_{m=0}^n \sum_{m'=0}^{n'} \left[g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi) \right] \left[g_{n'}^{m'} \cos(m'\varphi) + h_{n'}^{m'} \sin(m'\varphi) \right] \\ & \cdot P_n^m(\cos \vartheta) P_{n'}^{m'}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi . \end{aligned}$$

Diese Darstellung läßt sich durch Ausmultiplizieren, Ändern der Reihenfolge von Integration und Summation sowie die Anwendung der Gleichungen (5.45) bis (5.47) vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \langle B_r^2 \rangle_N = & \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{10} \sum_{n'=2}^{10} (n+1)(n'+1) \left[2\pi g_n^0 g_{n'}^0 \int_0^{\pi/2} P_n(\cos \vartheta) P_{n'}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right. \\ & \left. + \pi \sum_{m=1}^{\min(n,n')} (g_n^m g_{n'}^m + h_n^m h_{n'}^m) \int_0^{\pi/2} P_n^m(\cos \vartheta) P_{n'}^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right] . \end{aligned}$$

Als nächstes werden Terme, in denen $n = n'$ ist, herausgezogen, und die Summen über die gemischten Terme mit $n \neq n'$ unter Ausnutzung ihrer Symmetrie umgeordnet. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} \langle B_r^2 \rangle_N = & \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{10} (n+1)^2 \left\{ 2(g_n^0)^2 \int_0^{\pi/2} [P_n(\cos \vartheta)]^2 \sin \vartheta d\vartheta \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^n [(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2] \int_0^{\pi/2} [P_n^m(\cos \vartheta)]^2 \sin \vartheta d\vartheta \right\} \\ & + \sum_{n=3}^{10} \sum_{n'=2}^{n-1} (n+1)(n'+1) \left\{ 2g_n^0 g_{n'}^0 \int_0^{\pi/2} P_n(\cos \vartheta) P_{n'}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{n'} (g_n^m g_{n'}^m + h_n^m h_{n'}^m) \int_0^{\pi/2} P_n^m(\cos \vartheta) P_{n'}^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right\} . \end{aligned} \quad (5.49)$$

Die zugeordneten Kugelfunktionen P_n^m sind entweder symmetrisch oder antisymmetrisch bezüglich $\vartheta = \pi/2$. Daher ist $(P_n^m)^2$ in jedem Fall symmetrisch bezüglich $\vartheta = \pi/2$, und aus der Orthogonalitätsrelation der zugeordneten Kugelfunktionen (z. B. Joos, 1989) folgt

$$\int_0^{\pi/2} [P_n^m(\cos \vartheta)]^2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [P_n^m(\cos \vartheta)]^2 \sin \vartheta d\vartheta = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & m = 0 \\ \frac{2}{2n+1} & m > 0 \end{cases} . \quad (5.50)$$

Definiert man außerdem zur Vereinfachung der Schreibweise für $n \neq n'$

$$p_{nn'}^m := \int_0^{\pi/2} P_n^m(\cos \vartheta) P_{n'}^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta, \quad (5.51)$$

dann kann Gleichung (5.49) geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \langle B_r^2 \rangle_N = & \sum_{n=2}^{10} \frac{(n+1)^2}{2n+1} \sum_{m=0}^n \left[(g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right] \\ & + \sum_{n=3}^{10} \sum_{n'=2}^{n-1} (n+1)(n'+1) \left\{ 2g_n^0 g_{n'}^0 p_{nn'}^0 + \sum_{m=1}^{n'} (g_n^m g_{n'}^m + h_n^m h_{n'}^m) p_{nn'}^m \right\}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Der Vergleich mit Gleichung (5.40) führt auf

$$\langle B_r^2 \rangle_N = \langle B_r^2 \rangle + \sum_{n=3}^{10} \sum_{n'=2}^{n-1} (n+1)(n'+1) \left\{ 2g_n^0 g_{n'}^0 p_{nn'}^0 + \sum_{m=1}^{n'} (g_n^m g_{n'}^m + h_n^m h_{n'}^m) p_{nn'}^m \right\}, \quad (5.53)$$

d. h. B_r^2 gemittelt über eine Hemisphäre kann ausgedrückt werden durch das Mittel über die gesamte Kugeloberfläche und eine Korrektur, in die ausschließlich Terme mit gemischten Graden $n \neq n'$ eingehen. Für den Mittelwert der südlichen Hemisphäre, der analog zu Gleichung (5.48) definiert wird, erhält man wegen $2\langle B_r^2 \rangle = \langle B_r^2 \rangle_N + \langle B_r^2 \rangle_S$ sofort

$$\langle B_r^2 \rangle_S = \langle B_r^2 \rangle - \sum_{n=3}^{10} \sum_{n'=2}^{n-1} (n+1)(n'+1) \left\{ 2g_n^0 g_{n'}^0 p_{nn'}^0 + \sum_{m=1}^{n'} (g_n^m g_{n'}^m + h_n^m h_{n'}^m) p_{nn'}^m \right\}, \quad (5.54)$$

und für die Differenz zwischen den Mittelwerten der Hemisphären gilt

$$\begin{aligned} \langle B_r^2 \rangle_N - \langle B_r^2 \rangle_S = & 2 \sum_{n=3}^{10} \sum_{n'=2}^{n-1} (n+1)(n'+1) \left\{ 2g_n^0 g_{n'}^0 p_{nn'}^0 + \sum_{m=1}^{n'} (g_n^m g_{n'}^m + h_n^m h_{n'}^m) p_{nn'}^m \right\}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Die Berechnung der $p_{nn'}^m$ (Gleichung 5.51) läßt sich einfach ausführen. Tatsächlich ist etwa die Hälfte der $p_{nn'}^m$ aus Symmetriegründen gleich Null. Für die Berechnung bietet sich die Verwendung unnormierter zugeordneter Kugelfunktionen T_n^m an, die mit den hier verwendeten zugeordneten Kugelfunktionen in der Schmidtschen Normierung zusammenhängen über

$$P_n^0(\mu) = P_n(\mu) = T_n^0(\mu) \quad \text{und} \quad (5.56)$$

$$P_n^m(\mu) = \sqrt{2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} T_n^m(\mu) \quad \text{für } 1 \leq m \leq n, \quad (5.57)$$

mit $\mu = \cos \vartheta$. Aus Gleichung (5.51) wird damit zunächst ($n \neq k$)

$$p_{nk}^m = \int_0^{\pi/2} P_n^m(\cos \vartheta) P_k^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \quad (5.58)$$

$$= 2 \sqrt{\frac{(n-m)! (k-m)!}{(n+m)! (k+m)!}} \int_0^1 T_n^m(\mu) T_k^m(\mu) \, d\mu. \quad (5.59)$$

Analog zur Vorgehensweise beim Beweis der Orthogonalitätsrelation der zugeordneten Kugelfunktionen bei Joos (1989, 1. Buch, Kap. 5, §4, Glg. 69 u. 70) kann man zeigen, daß

$$\int_0^1 T_n^m(\mu) T_k^m(\mu) d\mu = \frac{T_k^m(0) T_n^{m+1}(0) - T_k^{m+1}(0) T_n^m(0)}{n(n+1) - k(k+1)} \quad \text{für } n \neq k \quad (5.60)$$

gilt. Damit ist die Integration in Gleichung (5.51) bereits auf die Berechnung der zugeordneten Kugelfunktionen $T_n^m(\mu)$ an der Stelle $\mu = 0$ zurückgeführt. Aus der expliziten Darstellung der zugeordneten Kugelfunktionen

$$T_n^m(\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \mu^{n-m-2\ell} \frac{(2n-2\ell-1)!!}{(2\ell)!! (n-m-2\ell)!} \quad (5.61)$$

lassen sich die Werte von T_n^m für $\mu = 0$ bestimmen. Ist $n-m$ ungerade, dann ist $T_n^m(0) = 0$, ist hingegen $n-m$ gerade, dann bleibt von der Summe nur der Koeffizient von μ^0 , d. h. es gilt $2\ell = n-m$ und

$$T_n^m(0) = (-1)^{(n-m)/2} \frac{(n+m-1)!!}{(n-m)!!} . \quad (5.62)$$

Zusammenfassend kann man das Ergebnis für beliebige $n \geq 0$ und $0 \leq m \leq n$ schreiben als

$$T_n^m(0) = \cos\left(\frac{n-m}{2} \pi\right) \frac{(n+m-1)!!}{(n-m)!!} . \quad (5.63)$$

Für gegebene Gauß-Koeffizienten ist es jetzt möglich, $\langle B_r^2 \rangle_N$, $\langle B_r^2 \rangle_S$ und damit die Differenz $\langle B_r^2 \rangle_N - \langle B_r^2 \rangle_S$ zu berechnen. Als nächstes sollen auch die Erwartungswerte und Varianzen angegeben werden. Im rotationsinvarianten statistischen Modell sind die Gauß-Koeffizienten unabhängige normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert Null. Für unabhängige Zufallsvariable X , Y , Z mit $E[X] = E[Y] = E[Z] = 0$ erhält man für die Kovarianz beispielsweise von X und Y

$$E[XY] - E[X] E[Y] = 0 , \quad (5.64)$$

d. h. X und Y sind unkorreliert, und insbesondere gilt $E[XY] = 0$. Für die Varianzen folgt daraus

$$\text{Var}[XY] = \text{Var}[X] \text{Var}[Y] \quad \text{und} \quad (5.65)$$

$$\text{Var}[XY + XZ] = \text{Var}[XY] + \text{Var}[XZ] . \quad (5.66)$$

Wendet man diese Regeln auf Gleichung (5.55) an, dann folgt schließlich für den Erwartungswert

$$E[\langle B_r^2 \rangle_N - \langle B_r^2 \rangle_S] = 0 \quad (5.67)$$

und für die Varianz

$$\begin{aligned} \text{Var}[\langle B_r^2 \rangle_N - \langle B_r^2 \rangle_S] = \\ 8 \sum_{n=3}^{10} \sum_{n'=2}^{n-1} (n+1)(n'+1) \left[2\sigma_n^2 \sigma_{n'}^2 (p_{nn'}^0)^2 + \sum_{m=1}^{n'} \sigma_n^2 \sigma_{n'}^2 (p_{nn'}^m)^2 \right] . \end{aligned} \quad (5.68)$$

Der Erwartungswert von $\langle B_r^2 \rangle_N - \langle B_r^2 \rangle_S$ muß gleich Null sein, weil im rotationsinvarianten Modell keine Hemisphäre besonders ausgezeichnet ist.

Setzt man in Gleichung (5.68) für σ_n bzw. $\sigma_{n'}$ die Werte des rotationsinvarianten statistischen Modells, bei dem es keine systematischen Unterschiede zwischen den Hemisphären gibt, aus den Gleichungen (5.35) und (5.33) ein, dann folgt für die Standardabweichung der Differenz zwischen den zwei Hemisphären

$$\sigma_D := \sqrt{\text{Var}[\langle B_r^2 \rangle_N - \langle B_r^2 \rangle_S]} = 33.58 \mu\text{T}^2. \quad (5.69)$$

Vergleicht man diesen Wert mit der Differenz der Mittelwerte von atlantischer und pazifischer Hemisphären für das IGRF 2005, dann erhält man $\Delta_{\text{IGRF}} \approx 1.6 \sigma_D$. Im Rahmen des rotationsinvarianten statistischen Modells ist der Wert von Δ_{IGRF} gar nicht so unwahrscheinlich, wie von Walker und Backus (1996) angegeben.

Wäre die Differenz $\langle B_r^2 \rangle_N - \langle B_r^2 \rangle_S$ normalverteilt, dann könnte man aufgrund dieses Ergebnisses schon entscheiden, daß die Nullhypothese $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = 0$ nicht abgelehnt werden kann, oder, mit anderen Worten, der Wert für Δ_{IGRF} wäre nicht so groß, daß man die Annahme eines rotationsinvarianten Modells verwerfen müßte. Die Werte von $\langle B_r^2 \rangle_N - \langle B_r^2 \rangle_S$ sind aber nicht normalverteilt, was im folgenden gezeigt wird. Aus diesem Grund muß vor einer endgültigen Entscheidung über die Nullhypothese die Verteilung von $\langle B_r^2 \rangle_N - \langle B_r^2 \rangle_S$ untersucht werden. Mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung sind die wesentlichen Parameter der Verteilungsfunktion bekannt, nicht jedoch die Verteilungsfunktion selbst. Immerhin ist klar, daß die Verteilung symmetrisch bezüglich $\langle B_r^2 \rangle_N - \langle B_r^2 \rangle_S = 0$ ist. Da keine der Hemisphären ausgezeichnet ist, sind positive und negative Differenzen des gleichen Betrages gleich wahrscheinlich.

Leider hilft Gleichung (5.55) in Hinblick auf die Verteilungsfunktion nicht weiter. Alle Summanden sind Produkte unterschiedlicher Gauß-Koeffizienten. Die einzelnen Gauß-Koeffizienten treten zwar mehrfach auf, aber immer in unterschiedlichen Kombinationen. Beim rotationsinvarianten statistischen Modell handelt es sich um Produkte von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen. Sind $X_1 \in \mathcal{N}(0, \sigma_1)$ und $X_2 \in \mathcal{N}(0, \sigma_2)$, dann ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Produkt $X_1 X_2$ der Zufallsvariablen gegeben durch

$$\frac{1}{\pi \sigma_1 \sigma_2} K_0 \left(\frac{|x|}{\sigma_1 \sigma_2} \right) \quad (5.70)$$

(z. B. Simon, 2006). K_0 ist die modifizierte Besselfunktion zweiter Art der Ordnung Null (vgl. Abramowitz und Stegun, 1965, 9.6.2), für deren asymptotisches Verhalten gilt

$$z \rightarrow 0 : \quad K_0(z) \rightarrow -\ln z \quad \text{und} \quad (5.71)$$

$$z \rightarrow +\infty : \quad K_0(z) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad (5.72)$$

siehe Abramowitz und Stegun (1965, 9.6.8 bzw. 9.7.2). Abbildung 5.17 veranschaulicht an einem Beispiel den Verlauf von K_0 . Im Vergleich mit einer Normalverteilung fällt auf, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte des Produktes einerseits in der Nähe von $x = 0$ höhere Werte annimmt und andererseits für $|x| \rightarrow \infty$ langsamer abfällt.

Somit steht fest, daß die Summanden in Gleichung (5.55) nicht normalverteilt sind. Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen läßt sich die Summe unabhängiger Zufallsvariablen

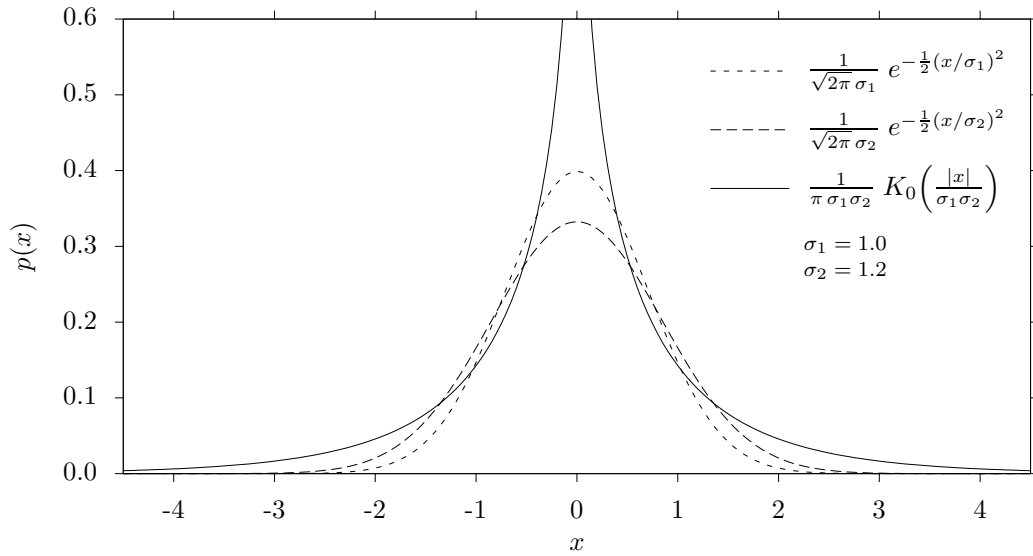


Abbildung 5.17: Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Produktes zweier normalverteilter Zufallsvariablen mit Erwartungswert Null läßt sich mit der modifizierten Besselfunktion K_0 zweiter Art der Ordnung Null beschreiben.

für eine hinreichend große Anzahl von Summanden durch eine Normalverteilung annähern, und die Summe in Gleichung (5.55) umfaßt immerhin 348 Summanden. Jedoch ist zu vermuten, daß die Summanden in Gleichung (5.55) nicht unabhängig sind. Als weiteres Problem könnte sich erweisen, daß die Varianzen der Gauß-Koeffizienten mit dem Grad n exponentiell abnehmen (vgl. Gleichung (5.35) und Abbildung 5.16), und deshalb nur ein geringer Teil der Summanden wesentliche Beiträge liefert.

Empirische Verteilungsfunktion von $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$

Um die Differenz Δ_{IGRF} für das IGRF 2005 besser einordnen zu können, wird im folgenden die Verteilung von $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$ empirisch bestimmt. Dazu werden zunächst im Rahmen eines Zufallsexperimentes mit dem rotationsinvarianten statistischen Modell aus Abschnitt 5.4.2 Gauß-Koeffizienten erzeugt, und anschließend die Differenz zwischen den Hemisphären berechnet. Die Differenz $\langle B_r^2 \rangle_N - \langle B_r^2 \rangle_S$ läßt sich exakt und effizient mit Gleichung (5.55) berechnen. Die resultierende empirische Verteilungsfunktion für 10^6 Modelle zeigt Abbildung 5.18. Der Mittelwert liegt nahe bei Null und die Standardabweichung ist praktisch gleich dem theoretischen Wert von $\sigma_D = 33.58 \mu\text{T}^2$. Der Verlauf der empirischen Verteilungsfunktion unterscheidet sich deutlich von einer Normalverteilung, die Abweichung läßt den Einfluß der oben beschriebenen Wahrscheinlichkeitsdichte der Summanden in Gleichung (5.55) erkennen. Insbesondere treten Werte in der Nähe von $\langle B_r^2 \rangle_N - \langle B_r^2 \rangle_S = 0$ häufiger auf als bei einer Normalverteilung.

Die Ergebnisse für $\langle B_r^2 \rangle_N - \langle B_r^2 \rangle_S$ lassen sich aufgrund der Rotationsinvarianz des statistischen Modell ohne Einschränkungen auf die Differenz $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$ übertragen. Alternativ kann man $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$ für zufällige Gauß-Koeffizienten an den Gitterpunkten der Abbildung 5.2 berechnen. Das ist hier sinnvoll, weil später bei der Behandlung des lateral inhomogenen Mantels die gleichen Punkte verwendet werden. Die Differenz folgt aus der

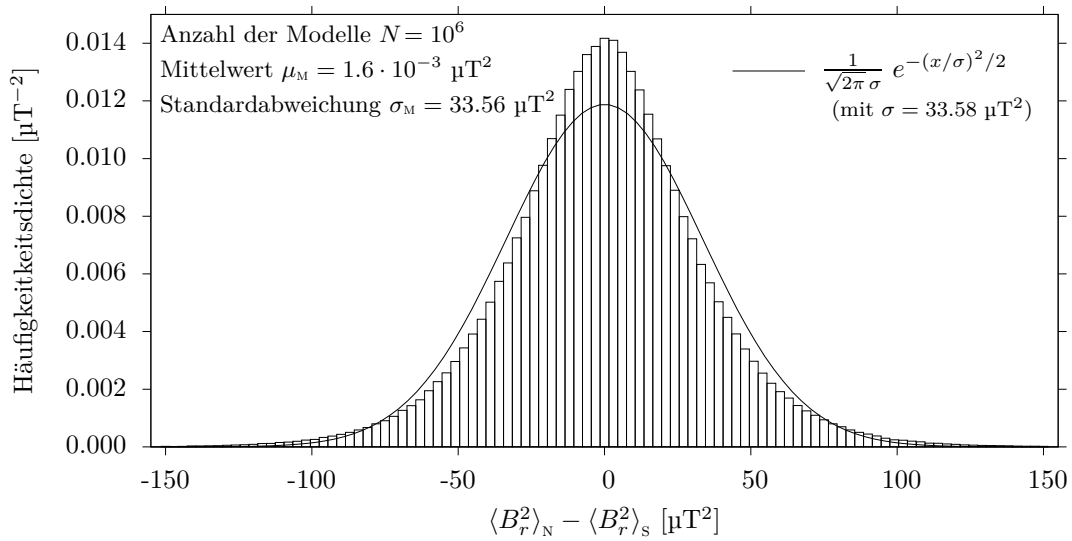


Abbildung 5.18: Die Häufigkeitsdichte der Differenz $\langle B_r^2 \rangle_N - \langle B_r^2 \rangle_S$ ist für 10^6 Modelle, die aus zufälligen Gauß-Koeffizienten gebildet werden, mit Gleichung (5.55) berechnet. Zum Vergleich ist die Normalverteilung mit der theoretischen Standardabweichung $\sigma_D = 33.58 \mu T^2$ eingezeichnet.

Mittelung über B_r^2 in den Punkten der jeweiligen Hemisphären gemäß Gleichung (5.14). Abbildung 5.19 zeigt die Ergebnisse für 10^6 zufällige Sätze von Gauß-Koeffizienten. Selbst die einfache Mittelung liefert zuverlässige Ergebnisse. (Walker und Backus (1996) wählen ein Verfahren, bei dem sie B_r^2 numerisch über die Hemisphären integrieren.)

Sind die im IGRF beobachteten Differenzen statistisch signifikant? Mit Hilfe der empirischen Verteilungsfunktion soll die Nullhypothese $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = 0$ getestet werden. Als Irrtumswahrscheinlichkeit werden 5 % akzeptiert, in anderen Worten, es soll ein Signifikanz-Test auf 5 %-Niveau durchgeführt werden. Da sowohl Abweichungen nach unten als auch nach oben berücksichtigt werden müssen, muß in einem zweiseitigen Test geprüft werden, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß

$$|\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P| > \Delta_{\text{IGRF}} \approx 53.7 \mu T^2 \quad (5.73)$$

gilt. Von den 10^6 Modellen, deren Differenzen nach Gleichung (5.55) berechnet sind, erfüllen 104 953 Modelle, etwa 10.5 %, die Ungleichung (5.73). Deshalb kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden. Die Nullhypothese würde abgelehnt werden, wenn für höchstens 5 % der Modelle der Betrag der Differenz größer ist als der der Stichprobe. Im konkreten Zufallsexperiment gilt für 5 % der Modelle $|\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P| > 68.5 \mu T^2$, so daß die Nullhypothese nur verworfen wird, falls der Betrag der Differenz für die Stichprobe größer ist als dieser Wert. Bei einer normalverteilten Zufallsgröße $X \in \mathcal{N}(0, \sigma)$ entspricht dies dem Fall, daß die Stichprobe außerhalb des sogenannten Vertrauensintervalls $[-1.96 \sigma; 1.96 \sigma]$ ist, in dem 95 % aller Werte liegen. Für das rotationsinvariante statistische Modell erhält man mit $1.96 \sigma_D = 65.8 \mu T^2$ einen etwas zu kleinen Wert, weil die Differenz $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$ nicht normalverteilt ist. Für die globalen Mittelwerte von B_r^2 erhält man

$$E[\langle B_r^2 \rangle] \approx 81.7 \mu T^2 \quad \text{für die Modelle und} \quad (5.74)$$

$$\langle B_r^2 \rangle \approx 73.0 \mu T^2 \quad \text{für das IGRF 2005.} \quad (5.75)$$

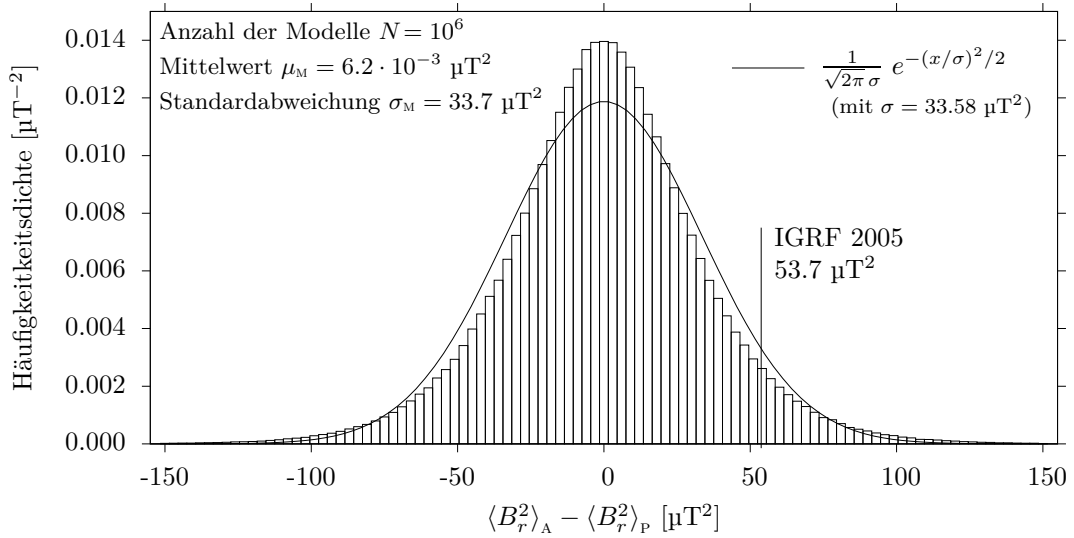


Abbildung 5.19: Die Häufigkeitsdichte der Differenz $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$ ist aus 10^6 Modellen mit zufälligen Gauß-Koeffizienten ermittelt, indem B_r^2 an den Gitterpunkten, die in Abbildung 5.2 dargestellt sind, berechnet und gemittelt wird.

Zu einer anderen Interpretation kommen Walker und Backus (1996) in ihrer Arbeit, in der sie die Nullhypothese $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = 0$ verwerfen und folgern, daß das Erdmagnetfeld möglicherweise nicht angemessen durch rotationsinvariante statistische Modelle beschrieben wird. Sie untersuchen insgesamt 18 Fälle für drei verschiedene Radien und sechs unterschiedliche Parametersätze für die rotationsinvarianten statistischen Modelle. Dementsprechend betreffen nur sechs Fälle das Feld an der Erdoberfläche. Die Ablehnung der Nullhypothese beruht in zwei dieser Fälle auch darauf, daß sie einseitige Tests durchführen, bei denen die Ungleichung (5.73) ersetzt wird durch

$$\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P > \Delta_{\text{IGRF}} , \quad (5.76)$$

obwohl zweiseitige Tests angemessen wären. Diese Ungleichung ist bei dem hier verwendeten rotationsinvarianten statistischen Modell in 5.2 % aller Fälle erfüllt, die Signifikanzgrenze liegt bei etwa $54.7 \mu T^2$. Dies steht mit den Ergebnissen von Walker und Backus (1996) im Einklang, die in den zwei Fällen, deren Parameter am ehesten den hier verwendeten entsprechen, auf 5 % bzw. 6 % (gerundet) kommen. Bei anderen Annahmen über das Mauersberger-Lowes-Spektrum kommen sie in den vier weiteren Fällen für die Erdoberfläche zu klaren Ablehnungen der Nullhypothese. In allen Fällen, in denen Radien innerhalb des Mantels betrachtet werden, verwerfen sie die Nullhypothese ebenfalls.

Die Vorgehensweise von Walker und Backus (1996) beim Testen der Nullhypothese kann in zumindest zwei Punkten kritisch hinterfragt werden. Eine detaillierte Analyse führt zu weit vom eigentlichen Gegenstand dieser Arbeit ab, und so werden die problematischen Stellen im folgenden nur kurz angesprochen. Dazu ist es hilfreich, sich zu überlegen, wie man idealerweise vorgehen würde. Wie läßt sich also durch den Vergleich zweier Hemisphären entscheiden, ob die Hypothese abgelehnt werden muß, daß sich das Restfeld durch ein rotationsinvariantes Modell beschreiben läßt? Rotationsinvarianz bedeutet, daß kein Ort gegenüber einem anderen besonders ausgezeichnet ist. Somit sollten die Unterschiede in B_r^2 nicht zu groß sein, insbesondere wenn man über größere Bereiche mittelt. Daher

bietet es sich durchaus an, zwei Hemisphären miteinander zu vergleichen. Für rotationsinvariante Modelle erwartet man, daß $E[\langle B_r^2 \rangle_1 - \langle B_r^2 \rangle_2] = 0$ gilt, das ist die Nullhypothese, wobei die Indizes für die Hemisphäre 1 bzw. 2 stehen. Im Idealfall wäre die Reihenfolge der Schritte:

- 1) Das Modell wird durch die Standardabweichungen der Gauß-Koeffizienten vorgegeben.
- 2) Die Hemisphären 1 und 2 werden festgelegt.
- 3) Die empirische Häufigkeitsdichte der Differenz $\langle B_r^2 \rangle_1 - \langle B_r^2 \rangle_2$ wird ermittelt.
- 4) Eine Stichprobe wird gezogen: In diesem Fall ist das der Wert $\langle B_r^2 \rangle_1 - \langle B_r^2 \rangle_2$ für das IGRF 2005.
- 5) Durch Vergleich der Stichprobe mit der Häufigkeitsdichte wird entschieden, ob die Stichprobe zur Ablehnung der Nullhypothese führt.

Der Vergleich mit der praktischen Vorgehensweise, bei der zwangsläufig Kompromisse eingegangen werden müssen, offenbart die Probleme. Im ersten Schritt werden die Standardabweichungen der Gauß-Koeffizienten aus dem Mauersberger-Lowes-Spektrum abgeleitet, das seinerseits für das IGRF 2005 – also nicht unabhängig von der Stichprobe – berechnet ist. Selbst wenn man das IGRF einer anderen Epoche verwendet, löst das das Problem nicht, weil die Gauß-Koeffizienten aller Epochen von 1900 bis 2005 offensichtlich korreliert sind. Es ist sogar denkbar, daß eine ungeeignete Wahl der Modellparameter zu einer falschen Entscheidung über die Ablehnung der Nullhypothese führt.

Schon im zweiten Schritt steht man vor dem nächsten Problem, weil nicht feststeht, welche Hemisphären für den Vergleich heranzuziehen sind. Die Einteilung in atlantische und pazifischen Hemisphäre beruht vor allem auf den bekannten Unterschieden des Erdmagnetfeldes, also auf Vorwissen über die Stichprobe. An dieser Stelle läuft man Gefahr, den Test auf die Stichprobe auszurichten. Möglicherweise wäre es angemessener, sowohl beim IGRF 2005 als auch bei jedem einzelnen rotationsinvarianten statistischen Modell die Hemisphären so zu wählen, daß die Differenz $\langle B_r^2 \rangle_1 - \langle B_r^2 \rangle_2$ maximal wird. Es ist zu vermuten, daß man bei diesem Vorgehen mehr Modelle finden kann, für die die Differenz größer ist als beim IGRF 2005. Womöglich ist die Differenz zwischen atlantischem und pazifischem Raum nicht so ungewöhnlich, wie es die Ergebnisse von Walker und Backus (1996) nahelegen.

Dieser Abschnitt hat gezeigt, daß die Differenz Δ_{IGRF} nicht signifikant ist, obwohl die Unterschiede zwischen der atlantischen und der pazifischen Hemisphäre auffällig sind. Daß die Nullhypothese nicht verworfen wird, bedeutet nicht, daß es tatsächlich keine Unterschiede aufgrund physikalischer Ursachen zwischen den Hemisphären gibt. Die Frage, ob eine laterale Inhomogenität der elektrischen Leitfähigkeit prinzipiell zu einer merklichen Verschiebung des Erwartungswertes $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ führen kann, ist von großem Interesse, insbesondere in Hinblick auf die vielen Spekulationen, die über laterale Unterschiede angestellt werden. Eine Antwort auf diese Frage versucht der nächste Abschnitt zu geben.

5.4.4 Einfluß des lateral inhomogenen Mantels auf B_r^2

In diesem Abschnitt wird der Erwartungswert von $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$ für den durch das Modell $S\delta_2$ beschriebenen lateral inhomogenen Mantel berechnet, wobei das im Kern erzeugte Magnetfeld als zeitlich variabel vorausgesetzt wird und durch stationäre Gauß-Prozesse

beschrieben wird. Mit einfachen Modellannahmen soll geprüft werden, ob die erhöhte elektrische Leitfähigkeit der pazifischen Hemisphäre den Wert von $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ merklich beeinflussen kann. Ausgangspunkt ist das Restfeld an der Kern-Mantel-Grenze, zu dem die Gauß-Koeffizienten der Grade $2 \leq n \leq 10$ beitragen. Die Modellannahmen sind:

- 1) Das Mauersberger-Lowes-Spektrum an der Kern-Mantel-Grenze ist weiß.
- 2) An der Erdoberfläche wird $\langle B_r^2 \rangle = 81.7 \text{ } \mu\text{T}^2$ gefordert.
- 3) Die Gauß-Koeffizienten für $2 \leq n \leq 10$ sind stationäre Gauß-Prozesse, die sich durch einfache Spektren beschreiben lassen.

Die erste Modellannahme kann als allgemein akzeptiert angesehen werden und ist hier zumindest eine ausreichend gute Näherung. Sie bestimmt die Beiträge der Gauß-Koeffizienten zum Mauersberger-Lowes-Spektrum relativ zueinander. Die zweite Modellannahme legt diese Anteile absolut fest. Der Wert $\langle B_r^2 \rangle = 81.7 \text{ } \mu\text{T}^2$ stammt aus dem rotationsinvarianten statistischen Modell (vgl. Abschnitt 5.4.3). Diese Wahl ermöglicht später den direkten Vergleich der Werte für $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$ beider Modelle.

Für die Gauß-Koeffizienten an der Kern-Mantel-Grenze soll analog zum rotationsinvarianten statistischen Modell

$$E[G_n^m] = E[H_n^m] = 0 \quad (5.77)$$

$$\text{Var}[G_n^m] = \text{Var}[H_n^m] = \sigma_n^2 \quad (5.78)$$

gelten (vgl. Gleichungen 5.27 und 5.28). Die Annahme eines – im Mittel – weißen Mauersberger-Lowes-Spektrum M_n^K an der Kern-Mantel-Grenze bedeutet $E[M_n^K] = \alpha^2$, mit einer Konstanten α^2 . Andererseits gilt analog zu Gleichung (5.29)

$$E[M_n^K] = (n+1) \sum_{m=0}^n \left\{ E[(G_n^m)^2] + E[(H_n^m)^2] \right\} = (n+1) (2n+1) \sigma_n^2, \quad (5.79)$$

und es folgt

$$\sigma_n^2 = \frac{\alpha^2}{(n+1)(2n+1)}, \quad (5.80)$$

wobei die Konstante α^2 im Nachhinein aus der Bedingung $\langle B_r^2 \rangle = 81.7 \text{ } \mu\text{T}^2$ (Modellannahme 2) bestimmt wird.

Die dritte Modellannahme knüpft an Kapitel 4 an, das die Gauß-Koeffizienten als stationäre Gauß-Prozesse behandelt. Die Beschreibung mit Gauß-Prozessen führt die zeitlichen Schwankungen der Gauß-Koeffizienten in das Modell ein. Die zeitlichen Schwankungen sind notwendig, denn der elektrisch leitfähige Mantel wirkt sich nur auf Magnetfeldänderungen aus. Der zeitliche Verlauf wird durch die Autokovarianzfunktion $R(u)$ bzw. äquivalent durch das Spektrum $I(\omega)$ charakterisiert. Autokovarianzfunktion $R(u)$ und Spektrum $I(\omega)$ bilden ein Fourier-Transformations-Paar (vgl. Gleichungen 4.11 und 4.12). Verwendet werden im folgenden das weiße Spektrum, für das

$$I(\omega) = \sigma_n^2 \Delta t \quad \text{bzw.} \quad R(u) = \sigma_n^2 \Delta t \delta(u) \quad (5.81)$$

gilt, und rote Spektren, die durch

$$I(\omega) = \sqrt{2\pi} \tau_K \sigma_n^2 \exp\left(-\frac{\tau_K^2 \omega^2}{2}\right) \quad \text{bzw.} \quad R(u) = \sigma_n^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2\tau_K^2}\right) \quad (5.82)$$

beschrieben werden. Rote Spektren werden beispielsweise von Hongre et al. (1998) für das Erdmagnetfeld verwendet, vgl. Abschnitt 4.2. Die Konstante τ_K ist die typische Korrelationszeit der Gauß-Koeffizienten an der Kern-Mantel-Grenze. Dabei wird für alle Gauß-Koeffizienten unabhängig vom Grad n dasselbe Spektrum verwendet. Das ist zwar eine grobe Vereinfachung, da die Spektren sicher vom Grad n abhängen (siehe Abschnitt 4.2), aber sie ist für die hier angestrebte Abschätzung vertretbar.

Vergleich der Annahmen über das Restfeld bei den statistischen Modellen und dem IGRF

Die Definition des Restfeldes ist bei einem lateral inhomogenen Mantel und einem zeitlich variablen Magnetfeld nicht mehr trivial. Physikalisch sinnvoll ist es, die Anteile der Multipole vom Grad $n \geq 2$ unmittelbar an der Kern-Mantel-Grenze als Restfeld aufzufassen, schließlich ist die Sonderstellung des Dipolanteils im Dynamoprozeß begründet. Die beiden statistischen Modelle folgen dieser Definition, die in die Wahl der Gauß-Prozesse beim lateral inhomogenen Mantel explizit eingeht und beim rotationsinvarianten statistischen Modell implizit. Die Annahme eines rotationsinvarianten statistischen Modells für die Gauß-Koeffizienten an der Erdoberfläche macht nur dann Sinn, wenn man das gleiche für die Kern-Mantel-Grenze voraussetzt und gleichzeitig von einer nur vom Radius abhängigen elektrischen Leitfähigkeit ausgeht.

Praktisch ist diese Definition für das Erdmagnetfeld nicht umsetzbar, man kann die Aufteilung in Multipolanteile vom Grad $n = 1$ und $n \geq 2$ nur auf das Magnetfeld an der Erdoberfläche anwenden. Daher bezieht sich die gängige Definition des Restfeldes (z.B. Strobach, 1991) auf das Feld an der Erdoberfläche. Geht man davon aus, daß die elektrische Leitfähigkeit lateral inhomogen sein kann, dann ist der Vergleich zwischen dem IGRF einerseits und einem der statistischen Modelle andererseits schwierig, weil im Fall des IGRF – zumindest prinzipiell – ein zeitlich variierender Dipol an der Kern-Mantel-Grenze Beiträge zum Restfeld an der Erdoberfläche liefert, das ist ein Effekt, der tendenziell einen zu großen Wert für $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$ liefern kann. Zwar erwähnen Walker und Backus (1996) eine gut leitende Schicht unter dem Pazifik als mögliche Ursache für einen erhöhten Wert von $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$, aber sie weisen nicht auf die damit verbundene Problematik hin. In Tabelle 5.2 werden die Eigenschaften der statistischen Modelle und des IGRF im Hinblick auf die Berechnung von $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ einander gegenübergestellt.

Wichtig ist festzuhalten, daß die statistischen Modelle ohne Einschränkungen miteinander verglichen werden können, weil sie nur die Grade $2 \leq n \leq 10$ an der Kern-Mantel-Grenze berücksichtigen. Zu beachten ist jedoch, daß bei den Gauß-Prozessen und dem lateral inhomogenen Mantel der Grad n an der *Erdoberfläche* keinen Beschränkungen unterliegt, d.h. hier gehen Multipolanteile in $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ ein, die außerhalb des Bereichs $2 \leq n \leq 10$ liegen. Das ist sinnvoll, weil man den gesamten Einfluß des lateral inhomogenen Mantels erfassen möchte. Ein Mantel, der lateral homogen ist, besitzt an der Erdoberfläche ausschließlich Multipolanteile der Grade $2 \leq n \leq 10$. Der Vergleich der beiden statistischen Modelle ist zur Untersuchung der grundsätzlichen Frage, ob ein lateral inhomogener Mantel merkbare Unterschiede zwischen den Hemisphären verursacht, völlig ausreichend.

	Restfeld des IGRF 2005	rotationsinvariantes statistisches Modell	Gauß-Prozesse und lateral inhomogener Mantel
$\langle B_{r/A}^2 \rangle - \langle B_{r/P}^2 \rangle$ an der Erdoberfläche	$\langle B_{r/A}^2 \rangle - \langle B_{r/P}^2 \rangle = 53.7 \text{ pT}^2$ wird aus den Gauß-Koeffizienten der Grade $2 \leq n \leq 10$ an der Erdoberfläche berechnet.	Es ist $E[\langle B_{r/A}^2 \rangle - \langle B_{r/P}^2 \rangle] = 0$ und $\sigma_D = 33.6 \text{ pT}^2$. Die Verteilungsfunktion von $\langle B_{r/A}^2 \rangle - \langle B_{r/P}^2 \rangle$ wird mit 10^6 Modellen ermittelt, die aus zufälligen Gauß-Koeffizienten g_n^m und h_n^m der Grade $2 \leq n \leq 10$ bestehen.	$E[\langle B_{r/A}^2 \rangle - \langle B_{r/P}^2 \rangle]$ wird aus den Übertragungsfunktionen des Mantels und den Spektren der Gauß-Koeffizienten G_n^m und H_n^m an der Kern-Mantel-Grenze berechnet. B_r enthält nicht nur Multipolanteile mit $2 \leq n \leq 10$.
Elektrische Leitfähigkeit des Mantels	Der mögliche Einfluß eines lateral inhomogenen Mantels ist Gegenstand der Untersuchung. Annahmen über den Mantel spielen keine Rolle für die Berechnung von $\langle B_{r/A}^2 \rangle - \langle B_{r/P}^2 \rangle$.	Für die elektrische Leitfähigkeit des Mantels gilt $\sigma = \sigma(r)$.	In den geschichteten Mantel ist eine lateral inhomogene Schicht eingebettet. Die Inhomogenität ist die Ursache für $E[\langle B_{r/A}^2 \rangle - \langle B_{r/P}^2 \rangle] \neq 0$.
Anregung an der Kern-Mantel-Grenze	Alle Gauß-Koeffizienten G_n^m und H_n^m sind vertreten.	Die Gauß-Koeffizienten G_n^m und H_n^m der Grade $2 \leq n \leq 10$ werden berücksichtigt.	Die Gauß-Koeffizienten vom Grad $2 \leq n \leq 10$ werden benutzt. Sie werden durch Gauß-Prozesse beschrieben.
Zusammenhang zwischen den Gauß-Koeffizienten an der Kern-Mantel-Grenze und der Erdoberfläche	Eine eindeutige Zuordnung ist nicht möglich, weil der Mantel lateral inhomogen sein kann.	Die Gauß-Koeffizienten g_n^m, h_n^m an der Erdoberfläche hängen nur mit den entsprechenden Koeffizienten gleichen Grades n und gleicher Ordnung m an der Kern-Mantel-Grenze zusammen.	Jeder Gauß-Koeffizient G_n^m, H_n^m an der Kern-Mantel-Grenze trägt zu mehreren verschiedenen Gauß-Koeffizienten g_n^m, h_n^m an der Erdoberfläche bei.

Tabelle 5.2: Übersicht der Unterschiede und Gemeinsamkeiten von IGRF 2005 und den beiden statistischen Modellen

Berechnung von $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$

Im Fall des rotationsinvarianten statistischen Modells wird für die Bestimmung der Verteilungsfunktion von $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$ eine große Zahl von Modellen benötigt, die jeweils aus den Gauß-Koeffizienten für $2 \leq n \leq 10$ an der Erdoberfläche bestehen. Analog könnte man im Fall des lateral inhomogenen Mantels eine große Anzahl von Modellen zur Berechnung von $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ betrachten, bei denen die Gauß-Koeffizienten als Realisierungen von Gauß-Prozessen an der Kern-Mantel-Grenze vorliegen. Für jede Realisierung müßte der zeitliche Verlauf von B_r an der Erdoberfläche berechnet werden. Das wäre ein immenser Aufwand. Das Ziel kann eleganter und sehr viel einfacher erreicht werden, indem die Autokovarianzfunktion $R(u)$ verwendet wird.

Vorgegeben wird die Autokovarianzfunktion $R(u)$ bzw. das Spektrum $I(\omega)$ der Gauß-Koeffizienten $G_n^m(t)$ und $H_n^m(t)$ an der Kern-Mantel-Grenze. Die Spektren $I_n^{cm}(\omega)$ und $I_n^{sm}(\omega)$ von $B_{nr}^{cm}(t)$ und $B_{nr}^{sm}(t)$ können mit Hilfe der in Gleichung (5.19) eingeführten Übertragungsfunktionen Γ_n^{cm} und Γ_n^{sm} für einen beliebigen Ort (ϑ, φ) an der Erdoberfläche berechnet werden, wobei die Übertragungsfunktionen mit dem Programm von P. Weidelt bestimmt werden. Für den Zusammenhang der Spektren der Gauß-Koeffizienten an der Kern-Mantel-Grenze einerseits und der Spektren von $B_{nr}^{cm}(t)$ und $B_{nr}^{sm}(t)$ an der Erdoberfläche andererseits gilt (siehe Gleichung 4.31)

$$I_n^{cm}(\omega) = |\Gamma_n^{cm}(\omega)|^2 I(\omega) \quad \text{und} \quad I_n^{sm}(\omega) = |\Gamma_n^{sm}(\omega)|^2 I(\omega) . \quad (5.83)$$

Die entsprechenden Autokovarianzfunktionen $R_n^{cm}(u)$ und $R_n^{sm}(u)$ sind als Fourier-Transformationen von $I_n^{cm}(\omega)$ bzw. $I_n^{sm}(\omega)$ prinzipiell verfügbar.

In Zwischenschritten werden mit den Autokovarianzfunktionen die Erwartungswerte $E[B_r]$ und $E[B_r^2]$ am Ort (ϑ, φ) der Erdoberfläche bestimmt. B_r setzt sich aus Beiträgen aller Gauß-Koeffizienten an der Kern-Mantel-Grenze zusammen:

$$B_r(t) = \sum_{n=2}^{10} \sum_{m=0}^n [B_{nr}^{cm}(t) + B_{nr}^{sm}(t)] . \quad (5.84)$$

Die B_{nr}^{cm} und B_{nr}^{sm} (an der Erdoberfläche $r = a$) sind als lineare Transformationen der unabhängigen stationären Gauß-Prozesse G_n^m und H_n^m (an der Kern-Mantel-Grenze $r = c$), vgl. Gleichung (5.19), selbst auch unabhängige stationäre Gauß-Prozesse, für die aus $E[G_n^m] = E[H_n^m] = 0$ wiederum

$$E[B_{nr}^{cm}] = E[B_{nr}^{sm}] = 0 \quad (5.85)$$

folgt, wie im folgenden im Zeitbereich kurz skizziert wird. Die Fourier-Transformation von Gleichung (5.19) führt auf die Faltung

$$B_{nr}^{cm}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_n^{cm}(u) G_n^m(t-u) du , \quad (5.86)$$

wobei die Impulsantwortfunktion $\gamma_n^{cm}(t)$ die Fourier-Transformierte der Übertragungsfunktion $\Gamma_n^{cm}(\omega)$ ist. Wegen der Ergodizität der Gauß-Prozesse sind zeitliches Mittel und

Erwartungswert – im Sinn von Ensemblemittelwert – gleich, d. h. es ist

$$\begin{aligned}
 E[B_{nr}^{cm}] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T B_{nr}^{cm}(t) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_n^{cm}(u) G_n^m(t-u) du dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_n^{cm}(u) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T G_n^m(t-u) dt du = 0 ,
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

weil

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T G_n^m(t-u) dt = E[G_n^m] = 0 \tag{5.88}$$

gilt. Analog gilt $E[B_{nr}^{sm}] = 0$, und insgesamt erhält man mit Gleichung (5.84)

$$E[B_r] = 0 \tag{5.89}$$

für jeden beliebigen Ort (ϑ, φ) . Dies Ergebnis ist nicht überraschend, schließlich ist das Modell so angelegt, daß im Mittel $B_r = 0$ sein muß. Daraus folgt auch

$$E[B_r^2] = \text{Var}[B_r] . \tag{5.90}$$

Wegen der Unabhängigkeit der B_{nr}^{cm} und B_{nr}^{sm} folgt mit Gleichung (5.84) weiter

$$\begin{aligned}
 E[B_r^2] &= \sum_{n=2}^{10} \sum_{m=0}^n \{ \text{Var}[B_{nr}^{cm}] + \text{Var}[B_{nr}^{sm}] \} \\
 &= \sum_{n=2}^{10} \sum_{m=0}^n [R_n^{cm}(0) + R_n^{sm}(0)] ,
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

wobei die Tatsache ausgenutzt wird, daß die Autokovarianzfunktion an der Stelle $u = 0$ gleich der Varianz ist. Verwendet man die Fourier-Transformation der Autokovarianzfunktionen (Gleichung 4.12)

$$R_n^{cm}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I_n^{cm}(\omega) e^{i\omega u} d\omega , \tag{5.92}$$

dann folgt mit Gleichung (5.83) für $u = 0$

$$\text{Var}[B_{nr}^{cm}] = R_n^{cm}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I_n^{cm}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |I_n^{cm}(\omega)|^2 I(\omega) d\omega . \tag{5.93}$$

Entsprechende Gleichungen gelten auch für B_{nr}^{sm} . Die Varianzen von B_{nr}^{cm} und B_{nr}^{sm} können durch Integration über das Produkt aus dem Spektrum des Gauß-Koeffizienten an der

Kern-Mantel-Grenze und dem Betragsquadrat der Übertragungsfunktionen des lateral inhomogenen Mantels gewonnen werden. Der Erwartungswert von B_r^2 an einem gegebenen Ort (ϑ, φ) ergibt sich aus der Summe dieser Varianzen.

Durch Integration über die atlantische und pazifische Hemisphäre (vgl. Gleichungen 5.23 und 5.24) erhält man die Werte $\langle E[B_r^2] \rangle_A$ und $\langle E[B_r^2] \rangle_P$. Vertauscht man die Reihenfolge der räumlichen Mittelwertbildung und der Berechnung des Ensemblemittels, dann ist schließlich

$$E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = \langle E[B_r^2] \rangle_A - \langle E[B_r^2] \rangle_P. \quad (5.94)$$

Bei der praktischen Ausführung wird das Integral in Gleichung (5.93) mit Hilfe von 90 logarithmisch äquidistanten Stützstellen ausgewertet. Die Integration über die Hemisphären wird durch die Summation über die 72×23 Gitterpunkte, die in Abbildung 5.2 gezeigt sind, ersetzt (vgl. Gleichung 5.14). Der aufwendigste Arbeitsschritt ist die Berechnung der Werte der Übertragungsfunktionen, die mit dem Programm von P. Weidelt erfolgt. Die einzelnen Schritte sind zusammengefaßt:

- 1) Die Werte der Übertragungsfunktionen $\Gamma_n^{cm}(\omega)$ und $\Gamma_n^{sm}(\omega)$ werden berechnet für
 - 117 Gauß-Koeffizienten vom Grad $2 \leq n \leq 10$,
 - 72×23 Gitterpunkte auf der Erdoberfläche und
 - 90 Stützstellen im Frequenzbereich.
- 2) Ein weißes Spektrum oder – alternativ – ein rotes Spektrum mit der typischen Korrelationszeit τ_K wird gewählt.
- 3) Die Varianzen $\text{Var}[B_{nr}^{cm}]$ und $\text{Var}[B_{nr}^{sm}]$ werden durch numerische Integration ermittelt (siehe Gleichung 5.93).
- 4) $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ wird berechnet, wobei gleichzeitig $E[\langle B_r^2 \rangle] = 81.7 \mu\text{T}^2$ gefordert wird.

Ergebnisse für $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$

Die Beispiele für die globale Verteilung des Erwartungswerts $E[B_r^2]$ für das Modell $S\delta_2$, die Abbildung 5.20 zeigt, unterscheiden sich in der typischen Korrelationszeit der Anregung an der Kern-Mantel-Grenze. Als Anregung dient weißes Rauschen (ohne zeitliche Korrelation) und rotes Rauschen mit den typischen Korrelationszeiten $\tau_K = 1$ a bzw. $\tau_K = 10$ a. Die Werte von $E[B_r^2]$ spiegeln die Lage der atlantischen und der pazifischen Hemisphäre wider. Die Werte sind – im Rahmen der Rechengenauigkeit und der gewählten Kartenprojektion – rotationssymmetrisch bezüglich der Achse durch die Zentren der Hemisphären. Im Zentrum der atlantischen Hemisphäre nimmt $E[B_r^2]$ sein Maximum an, im Zentrum der pazifischen sein Minimum.

Für weißes Rauschen (vgl. Abb. 5.20a) erhält man mit $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = 69.4 \mu\text{T}^2$ eine deutliche Verschiebung des Erwartungswertes durch die laterale Inhomogenität, wie der Vergleich mit dem Wert $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P = 53.7 \mu\text{T}^2$ für das IGRF 2005 (siehe Abschnitt 5.4.1) und mit der Standardabweichungen $\sigma_D = 33.6 \mu\text{T}^2$ für das rotationsinvariante statistische Modell nach Constable und Parker (1988) (siehe Abschnitt 5.4.3) zeigt. Immerhin führt $|\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P| > 68.5 \mu\text{T}^2$ auf 5 %-Niveau zur Ablehnung der Hypothese, daß $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = 0$ gilt.

Bei rotem Rauschen mit $\tau_K = 1$ a (vgl. Abb. 5.20b) liegt der Erwartungswert immerhin noch bei $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = 48.8 \mu\text{T}^2$, also bei etwa 70 % des Wertes für weißes Rauschen.

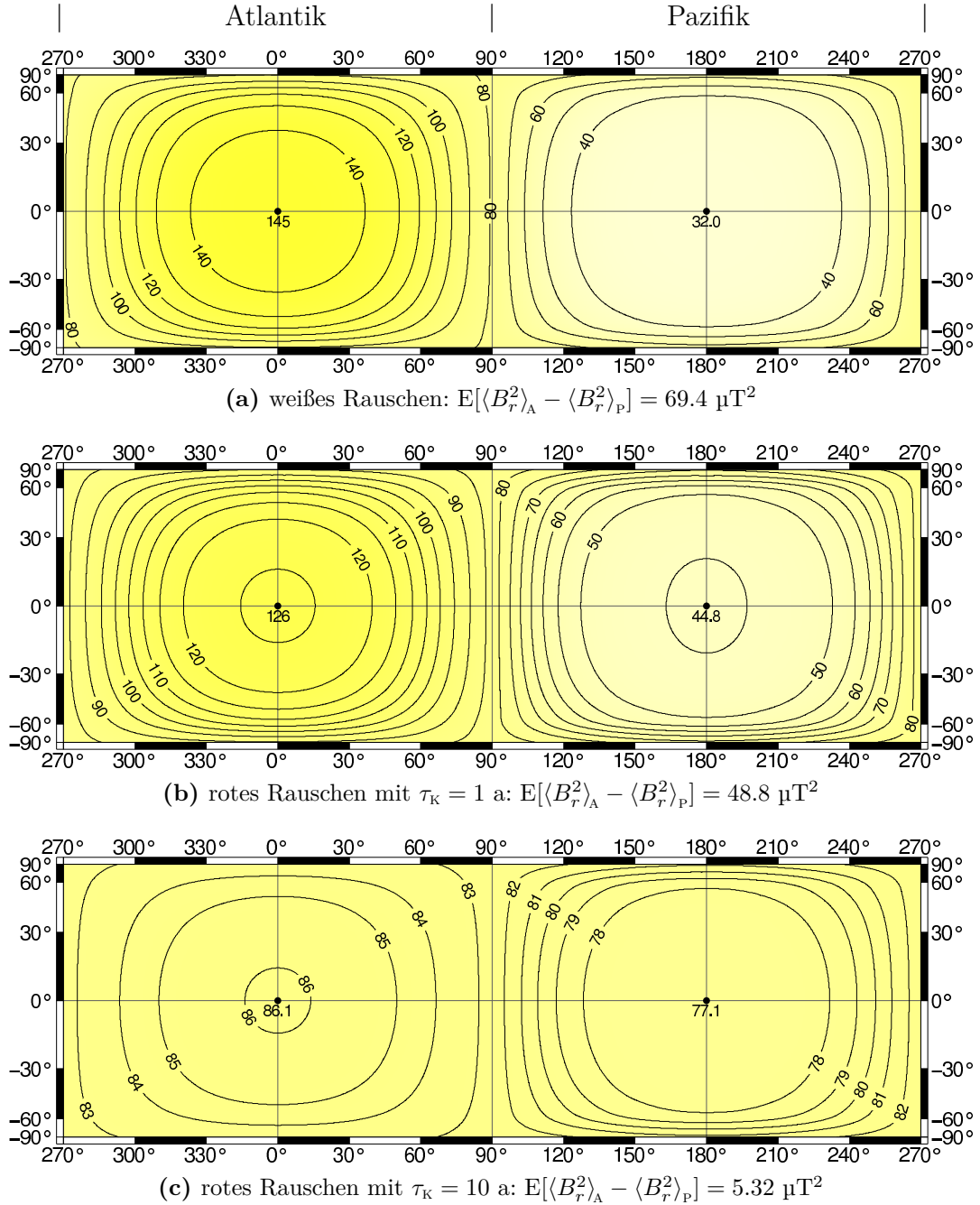


Abbildung 5.20: Die Karten zeigen $E[B_r^2]$ in μT^2 an der Erdoberfläche für Modell $S\delta_2$ und verschiedene statistische Anregung an der Kern-Mantel-Grenze. Der resultierende Erwartungswert $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ für die Differenz zwischen den Hemisphären ist unter den Karten angegeben.

Für $\tau_K = 10$ a (vgl. Abb. 5.20c) sinkt der Erwartungswert auf $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = 5.32 \mu T^2$ und fällt verglichen mit der Standardabweichung σ_D des rotationsinvarianten statistischen Modell kaum ins Gewicht. Für $\tau_K > 10$ a verhält sich der Erwartungswert ungefähr umgekehrt proportional zu τ_K^2 , wie der Verlauf von $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ als Funktion von τ_K in Abbildung 5.21 nahelegt.

Zu den Modellannahmen auf Seite 147 gehört, daß für alle Grade n die gleiche typische Korrelationszeit verwendet werden kann. Um zu beurteilen, ob dies eine zulässige Vereinfachung ist, muß man die Beiträge der Gauß-Koeffizienten jedes Grades n zu $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ einzeln betrachten. Gleichung (5.94) ermöglicht in Verbindung mit Gleichung (5.91) die entsprechende Aufteilung in

$$E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = \alpha \sum_{n=2}^{10} d_n, \quad (5.95)$$

wobei zur Abkürzung

$$\alpha d_n := \sum_{m=0}^n \left\{ \left\langle \text{Var}[B_{nr}^{cm}] + \text{Var}[B_{nr}^{sm}] \right\rangle_A - \left\langle \text{Var}[B_{nr}^{cm}] + \text{Var}[B_{nr}^{sm}] \right\rangle_P \right\} \quad (5.96)$$

gesetzt worden ist. Der Normierungsfaktor α folgt aus $E[\langle B_r^2 \rangle] = 81.7 \mu T^2$. Er soll hier die Einheit μT^2 haben, so daß die d_n dimensionslos sind. Wichtig ist im folgenden nur das Verhältnis der d_n zueinander sowie ihre Abhängigkeit von $\tau_K(n)$, wenn man unterschiedliche Korrelationszeiten für verschiedene Grade zuläßt.

Der Verlauf der $d_n(\tau_K)$ ist in Abbildung 5.22 doppeltlogarithmisch aufgetragen. Er ist für alle n sehr ähnlich, wobei d_n zunächst allmählich auf das Maximum ansteigt und anschließend steil abfällt. Mit größeren n sind die Kurven jedoch stark nach unten und leicht zu kleineren Werten von τ_K hin verschoben. Die Verschiebung nach unten liegt ungefähr bei einem Faktor in der Größenordnung von $(c/a)^{2n}$ und ist maßgeblich durch die geometrische Abschwächung vorgegeben. Die Verschiebung nach links beruht auf der niedrigeren elektromagnetischen Dämpfung bei höheren Graden bei gleicher typischer Korrelationszeit τ_K .

Die Abnahme bei großen τ_K beruht in Abbildung 5.22 wie auch in Abbildung 5.21 darauf, daß der Mantel in diesem Bereich fast als Nichtleiter aufgefaßt werden kann. In dem Bereich, in dem eine Hemisphäre noch stark abschirmt, während die andere Hemisphäre bereits durchlässiger ist, besitzt $d_n(\tau_K)$ ein Maximum. Zu kleineren τ_K nimmt d_n wieder ab, weil beide Hemisphären das Feld des Kerns stark abschirmen und der Leitfähigkeitskontrast zwischen ihnen immer weniger ausmacht. In Abbildung 5.21 wird diese Abnahme dadurch kompensiert, daß immer stärkere Felder an der Kern-Mantel-Grenze benötigt werden, um $E[\langle B_r^2 \rangle] = 81.7 \mu T^2$ zu erfüllen. Für das Modell $S\delta_2$ werden die Maxima von $d_n(\tau_K)$ für Werte von τ_K in der Größenordnung von 1 a angenommen.

Aus der Abbildung 5.22 kann man schließen, daß eine gemeinsame Korrelationszeit τ_K für alle Grade n zu einer aussagekräftigen Abschätzung führt, solange sich die typischen Korrelationszeiten eines gegebenen Spektrums nicht um wesentlich mehr als eine Größenordnung unterscheiden. In der Regel nehmen bei Spektren die vom Grad n abhängigen typischen Korrelationszeiten $\tau_K(n)$ mit steigendem Grad ab. Rechts vom Maximum der

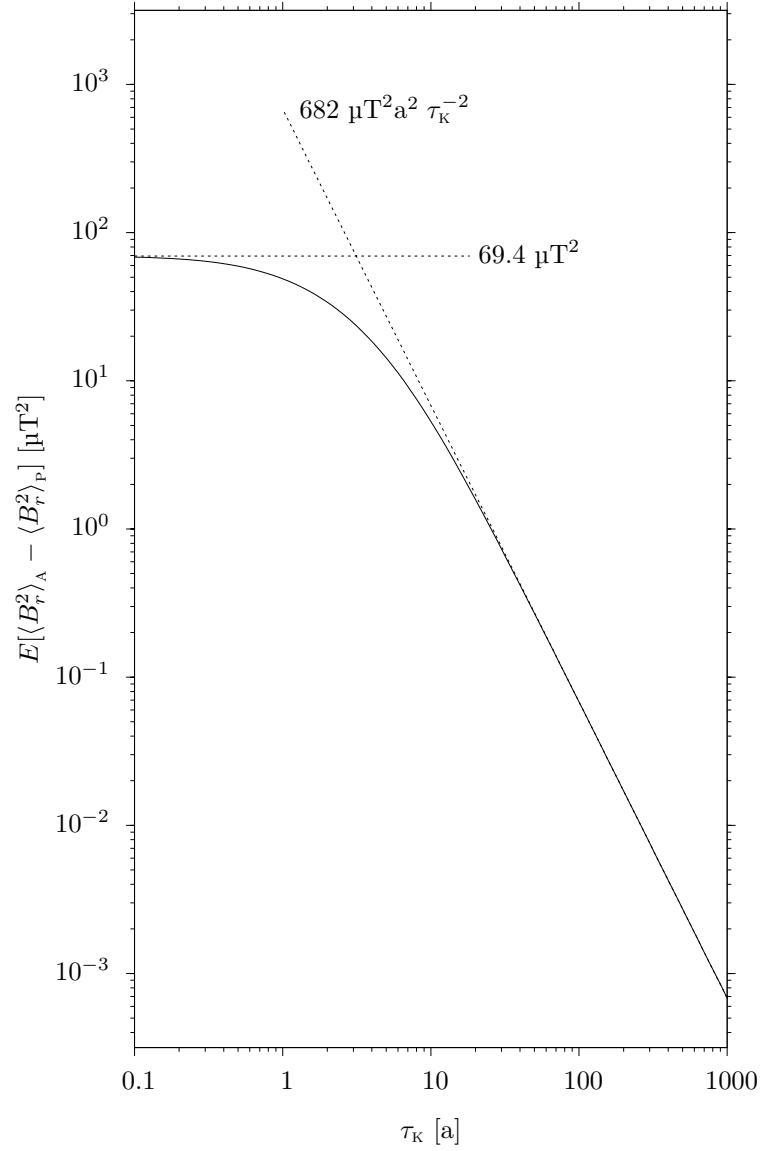


Abbildung 5.21: $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ ist für rote Spektren aufgetragen über der typischen Korrelationszeit τ_K . Für kleine τ_K strebt $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ gegen den Wert für weißes Rauschen von 69.4 μT^2 , und für $\tau_K > 10$ a gilt näherungsweise $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] \sim \tau_K^{-2}$.

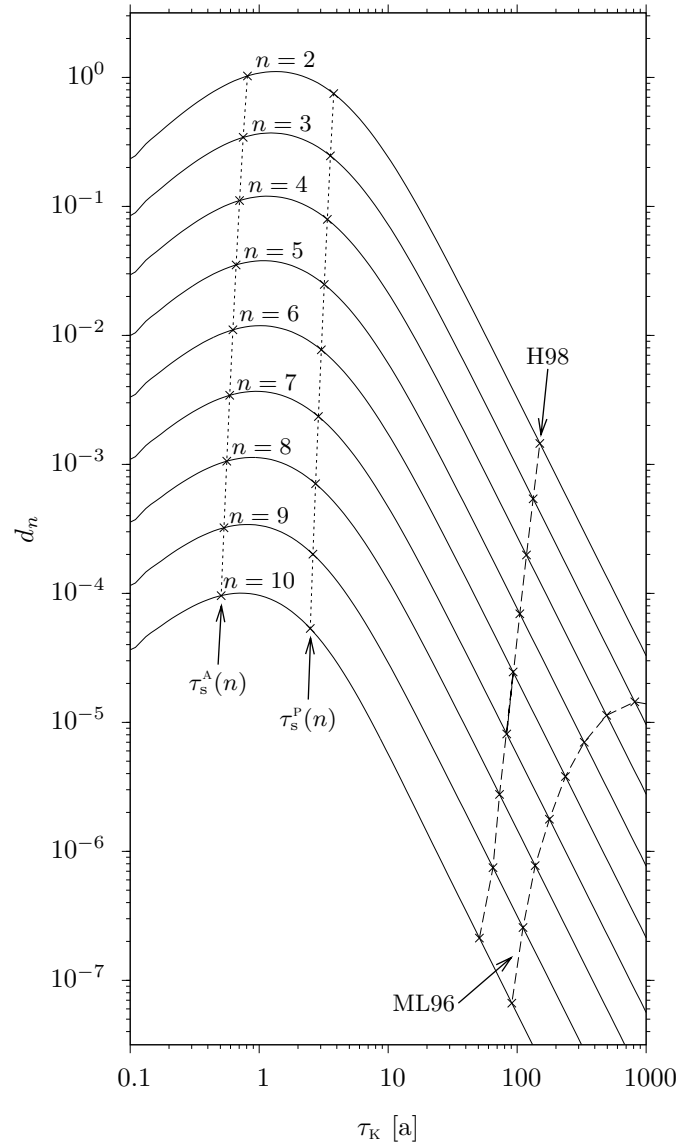


Abbildung 5.22: Der Vergleich der relativen Beiträge $d_n(\tau_K)$ zu $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ zeigt die starke Abhängigkeit vom Grad n . Markiert sind zwei Spektren für das Erdmagnetfeld, nämlich H98 von Hongre et al. (1998), Tabelle 4.1 auf Seite 91, und ML96 von McLeod (1996), Tabelle 4.2 auf Seite 92. Außerdem sind die Glättungszeiten $\tau_s^A(n)$ und $\tau_s^P(n)$ für das atlantische Modell $S\delta_2^A$ bzw. das pazifische Modell $S\delta_2^P$ aus Tabelle 5.1, Seite 116, eingetragen.

$d_n(\tau_K)$ führt dies zu einer Unterschätzung des Einflusses höherer Grade, deren Beitrag zu $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ aber klein ist.

Zwei Beispiele für die Abschätzung der Frequenzspektren der Gauß-Koeffizienten sind die Modelle von Hongre et al. (1998) sowie McLeod (1996) aus Abschnitt 4.2. Die Werte für die typischen Korrelationszeiten aus der Tabelle 4.1, Seite 91, bzw. der Tabelle 4.2, Seite 92, sind in Abbildung 5.22 angegeben. Die Werte von Hongre et al. (1998) können direkt verglichen werden, weil rotes Rauschen angenommen wird (vgl. Gleichung 4.21). Die typischen Korrelationszeiten von McLeod (1996) sind eingetragen, obwohl ein anderes mathematisches Modell für das Spektrum verwendet wird (vgl. Gleichung 4.26) und dadurch der unmittelbare Vergleich schwierig ist.

Die typischen Korrelationszeiten von Hongre et al. (1998) sind alle größer als 50 a, und aus Abbildung 5.21 kann man für sie grob $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] < 0.5 \mu T^2$ abschätzen. Verglichen mit der Standardabweichung $\sigma_D = 33.58 \mu T^2$ (Gleichung (5.69)) für das rotationsinvariante statistische Modell für die Gauß-Koeffizienten (vgl. Abschnitt 5.4.3) ist dieser Wert sehr klein. Modell $S\delta_2$ führt in diesem Fall nicht zu signifikanten Abweichungen von $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = 0$. Die typischen Korrelationszeiten von McLeod (1996) sind sogar noch größer als die von Hongre et al. (1998). Bei diesem Modell sind die Anteile der Multipole der Grade $n = 2, 3$ und 4 ungefähr gleich groß, wobei der Quadrupol ($n = 2$) mit einer typischen Korrelationszeit von 1600 a außerhalb des betrachteten Bereichs liegt. Prinzipiell könnten unterschiedliche Spektren mit verschiedenen, vom Grad n abhängigen typischen Korrelationszeiten verwendet werden, aber der Mehraufwand lohnt sich für die Spektren von McLeod (1996) nicht, weil die typischen Korrelationszeiten weit außerhalb des relevanten Bereichs liegen.

Auch die Glättungszeiten $\tau_s^A(n)$ und $\tau_s^P(n)$ des atlantischen Modells $S\delta_2^A$ bzw. des pazifischen Modells $S\delta_2^P$ aus Tabelle 5.1 sind in Abbildung 5.22 eingezeichnet. Die kleineren Glättungszeiten des atlantischen Modells liegen links vom Maximum der d_n , die des pazifischen Modells rechts davon. Die Glättungszeiten geben sogar die Verschiebung der Maxima qualitativ wieder und liefern für das Modell $S\delta_2$ hilfreiche Hinweise darauf, wo der Bereich der τ_K liegt, für den nennenswerte Abweichungen von $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = 0$ erwartet werden können.

5.4.5 Bewertung des Einflusses eines lateral inhomogenen Mantels

Wenn man $S\delta_2$ als Modell für einen lateral inhomogenen Mantel zugrunde legt, dann läßt sich für das Erdmagnetfeld in drei relevanten Fällen praktisch ausschließen, daß eine gut leitende Schicht unter dem Pazifik nennenswerten Einfluß ausübt. Das betrifft die Feldumkehrung, also die Drehung eines Dipolfeldes, wenn man von einer Zeitspanne in der Größenordnung von 1000 a ausgeht. Da durch den lateral inhomogenen Mantel fast keine Änderung des Feldes an der Erdoberfläche auftritt, ist eine durch Leitfähigkeitsinhomogenitäten verursachte Wechselwirkung, die zu bevorzugten Polwanderkurven führt, äußerst unwahrscheinlich. Ähnlich verhält es sich mit der Westdrift des Restfeldes, die ebenfalls für beobachtbare Effekte zu langsam abläuft. Zu bedenken ist in diesem Zusammenhang auch, daß der scharfe Leitfähigkeitskontrast des Modells $S\delta_2$ zwischen den Hemisphären zu deutlicheren Effekten führen sollte als ein stetiger Verlauf zwischen hohen und niedrigen Leitfähigkeitswerten, der physikalisch realistischer erscheint, hier aber nicht

untersucht wurde. Und schließlich sind die typischen Korrelationszeiten des Erdmagnetfeldes so groß, daß nicht mit statistisch auffälligen Abweichungen von $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = 0$ zu rechnen ist. Immerhin führen die nicht sehr realistischen Fälle von weißem Rauschen und rotem Rauschen mit $\tau_K = 1$ a im Mittel zu deutlichen Unterschieden zwischen den Hemisphären.

Die Theorie kann auf die Säkularvariation übertragen werden, deren typische Korrelationszeiten möglicherweise kürzer sind als die des Feldes selbst (z. B. McLeod, 1996), aber vermutlich immer noch zu groß sind (vgl. Abschnitt 4.2, Tabelle 4.2). Auf relevanten Zeitskalen laufen die Jerks ab, die jedoch häufig nicht global auftreten.

Die Ergebnisse legen nahe, daß man durch eine wesentliche Erhöhung der elektrischen Leitfähigkeit bzw. des Leitfähigkeitskontrasts oder eine deutliche Verschiebung der inhomogenen Schicht nach oben Effekte auf längeren Zeitskalen erzwingen kann. Allerdings ist es fraglich, ob ein solches Modell für den Erdmantel realistisch ist. Beim Modell $S\delta_2$ liegt das Verhältnis in der dünnen Schicht bei $\tau_P/\tau_A = 5$, ein moderater Wert. Zur Erhöhung des Kontrastes kann man τ_A weiter absenken oder τ_P anheben. Beides sollte die auftretenden Effekte verstärken. Die Absenkung von τ_A verhindert indes nicht, daß der Mantel für die oben beschriebenen langsamen Vorgänge als Nichtleiter angesehen werden kann. Sie macht darüberhinaus nur Sinn bis zu dem Punkt, an dem der umgebende Mantel die elektromagnetische Dämpfung dominiert. Die Anhebung von τ_P auf der anderen Seite ist wirkungsvoller, weil sich der Mantel dadurch auf längeren Zeitskalen bemerkbar macht. Die gut leitende Hemisphäre des Modells $S\delta_2$ entspricht mit ihrem Leitwert von $\tau_P = 5 \cdot 10^8$ S in ihrer Wirkung ungefähr einer 250 km dicken Schicht mit einer elektrischen Leitfähigkeit von $\sigma \approx 4 \cdot 10^3$ S/m, wenn man die Glättungszeiten dem Vergleich zugrunde legt (vgl. Abschnitt 3.4). Dieser Wert ist bereits recht hoch angesetzt, und es ist nicht ersichtlich, wie eine noch höhere elektrische Leitfähigkeit zustande kommen könnte. Die lateral inhomogene Schicht wesentlich weiter nach außen zu verlegen, macht ebenfalls wenig Sinn. Sie liegt im Modell $S\delta_2$ mit dem Radius $b = 2691$ km bereits 210 km oberhalb der Kern-Mantel-Grenze in der Nähe der oberen Grenze der D''-Schicht, und es gibt keinen Grund, eine lateral inhomogene Schicht außerhalb der D''-Schicht anzunehmen. Außerdem sollte eine solche Inhomogenität bei größerem Abstand von der Kern-Mantel-Grenze von oben erkennbar sein.

Zusammenfassung

Die wesentlichen Erkenntnisse und Schlüsse, zu denen diese Arbeit gelangt, lauten knapp zusammengefaßt:

- Sinnvolle Mantelmodelle lassen den Mantel als schlechten Leiter erscheinen, der die Säkularvariation kaum beeinflusst.
- Formal erhält man zwei Sätze von Zeitkonstanten für die radiale und die tangential Magnetfeldkomponente – jedoch weisen die Stetigkeitsbedingungen an der Kern-Mantel-Grenze nur der radialen Komponente eine geophysikalische Bedeutung zu (Kapitel 2 und 3).
- Die Zeitkonstanten können für Schichtmodelle elementar aus den Radien r_ℓ der Schichtgrenzen und der elektrischen Leitfähigkeit σ_ℓ der Schichten berechnet werden. Sie erlauben die Unterscheidung zwischen schnellen und langsamen Magnetfeldänderungen (Kapitel 3).
- Eine infinitesimal dünne Schicht mit endlichem Leitwert unmittelbar an der Kern-Mantel-Grenze hat keinen Einfluß auf die Säkularvariation (Kapitel 3).
- Laterale Unterschiede sind selbst bei großen Leitfähigkeitskontrasten klein und kaum beobachtbar, weil die Nähe zur Kern-Mantel-Grenze das anomale Feld oberhalb der Schicht stark dämpft (Kapitel 5).
- Die im Restfeld des IGRF beobachteten Unterschiede zwischen atlantischer und pazifischer Hemisphäre können durchaus zufällig zustande kommen (Kapitel 5).

Diese Ergebnisse folgen aus der Untersuchung von drei exemplarischen Modellen der elektrischen Leitfähigkeit, an denen der Einfluß des Erdmantels auf die Diffusion der Säkularvariation untersucht wird. Die in Kapitel 1 eingeführten Modelle haben zwischen der Oberfläche und der D''-Schicht die gleiche Leitfähigkeit, die auf 8.6 S/m ansteigt. Die Modelle unterscheiden sich nur in der 250 km dicken D''-Schicht. Dort steigt die elektrische Leitfähigkeit im Modell S nur moderat auf 10 S/m an, während sie im Modell SD auf 2000 S/m springt. Für das lateral inhomogene Modell S δ_2 wird die D''-Schicht des Modells SD durch eine infinitesimal dünne Schicht 210 km oberhalb der Kern-Mantel-Grenze ersetzt, die in der atlantischen Hemisphäre den Leitwert $\tau_A = 10^8$ S und in der pazifischen den Leitwert $\tau_P = 5 \cdot 10^8$ S besitzt (siehe Abbildung 1.10 und 1.11, Seite 26 bzw. 27).

Wie aus dem zeitlichen Verlauf der Radialkomponente der magnetischen Flußdichte B_r an der Kern-Mantel-Grenze der Verlauf an der Erdoberfläche für ein gegebenes radialsymmetrisches Mantelmodell berechnet wird, zeigt Kapitel 2. Ausgehend von den Maxwell-Gleichungen in der quasi-stationären Näherung wird die harmonische Anregung untersucht, wobei das Magnetfeld in einen poloidalen und einen toroidalen Anteil zerlegt wird

(Mie-Darstellung). Letzterer ist im Außenraum ($\sigma = 0$) nicht beobachtbar, so daß man sich auf den poloidalen Anteil beschränken kann, für dessen Potential P_B eine Diffusionsgleichung hergeleitet wird. Schließlich erhält man Übertragungsfunktionen $\Gamma_n(\omega)$ für die radiale und die tangentielle Komponente des poloidalen Feldes, die den Mantel als Tiefpaß charakterisieren: Je größer die Frequenz ω ist, um so stärker sind die elektromagnetische Dämpfung und die Phasenverzögerung. Dabei ist die Dämpfung für kleine Grade n stärker als für große. Hinzu kommt eine nur vom Grad n abhängige geometrische Abschwächung $\sim (c/a)^{n+2}$. Aus den Übertragungsfunktionen $\Gamma_n(\omega)$ läßt sich grob abschätzen, daß Modell S für Perioden oberhalb von $T \approx 5.5$ a praktisch durchlässig ist und Modell SD für Perioden ab $T \approx 55$ a.

Die Verwendung der harmonischen Anregung stellt keineswegs eine Beschränkung dar, weil beliebige Anregungsformen mit Hilfe der Fourier-Synthese behandelt werden können. In Abschnitt 2.11 wird auf diese Weise der δ -Impuls an der Kern-Mantel-Grenze betrachtet. An ihm lassen sich besonders deutlich die zeitliche Verzögerung und die Glättung erkennen. Die Zeit bis zum Erreichen des Maximums der Impulsantwort an der Oberfläche (Maximumszeit) liegt bei Modell S zwischen 54.4 d für den Grad $n = 1$ und 25.8 d für $n = 10$, bei Modell SD zwischen 425 d ($n = 1$) und 291 d ($n = 10$), siehe Tabelle 2.1 auf Seite 56.

In Kapitel 3 werden die von Backus (1983) eingeführten Zeitkonstanten, nämlich die Diffusionszeit $\tau_d(n)$ und die Glättungszeit τ_s^R , auf Schichtmodelle angewendet, für die sie sich elementar berechnen lassen. Und obwohl die Zeitkonstanten aus einer Näherung für kleine Frequenzen hervorgehen, erweisen sie sich als überaus nützlich, denn sie geben eine Zeit vor, die die Unterscheidung von langsamen und schnellen Feldänderungen erlaubt, also von Änderungen, die praktisch nicht gedämpft werden, und solchen, die merklich verzögert und verzerrt werden. Formal erhält man Zeitkonstanten sowohl für die radiale als auch für die tangentielle Komponente des poloidalen Feldes, aber nur die radiale Komponente ist relevant, weil sie an der Kern-Mantel-Grenze stetig und damit durch das Kernfeld festgelegt ist. Die tangentielle Komponente kann dann aus der Kenntnis der radialen Komponente bestimmt werden. Die Diffusionszeiten der radialen Komponente des Modells S liegen zwischen $\tau_d^R(1) = 122$ d und $\tau_d^R(10) = 33.7$ d, die des Modells SD zwischen $\tau_d^R(1) = 987$ d und $\tau_d^R(10) = 632$ d, siehe Tabelle 3.1a auf Seite 76 und Abbildung 3.3 auf Seite 78. Die Diffusionszeit ist größer als die oben erwähnte Maximumszeit, weil sie die Lage des Schwerpunktes der Impulsantwortfunktion angibt, welche zwar schnell ansteigt, aber nur langsam abfällt, so daß der Schwerpunkt deutlich nach dem Maximum erreicht wird. Die Glättungszeiten der radialen Komponente sind mit $\tau_s^R(1) = 88.9$ d und $\tau_s^R(10) = 14.3$ d für Modell S sowie mit $\tau_s^R(1) = 727$ d und $\tau_s^R(10) = 447$ d für Modell SD, siehe Tabelle 3.1b, kleiner als die entsprechenden Diffusionszeiten. Beide Modelle sind mit Jerks, die innerhalb nur eines Jahres ablaufen, verträglich. Allerdings sollte Modell SD den Verlauf von Jerks an der Erdoberfläche bereits deutlich verzögern und glätten. Jerks sind aus zwei Gründen von besonderem Interesse für die Abschätzung der elektrischen Leitfähigkeit des Mantels. Erstens sind es wohl die schnellsten bekannten Magnetfeldänderungen internen Ursprungs, und zweitens gibt es durch den möglichen Zusammenhang mit Tageslängenänderungen Hinweise darauf, wann sie an der Kern-Mantel-Grenze auftreten. Letzteres läßt auf die Laufzeit der Jerks durch den Mantel schließen, die direkt mit der Diffusions- oder Maximumszeit verglichen werden kann. In der Regel lassen sich

sonst nur Aussagen über die Glättung treffen.

Die Zeitkonstanten bieten sich ferner für den einfachen Vergleich von Leitfähigkeitsmodellen an. Das wird ausgenutzt, um in Vorbereitung auf Kapitel 5 die 250 km dicke D'' -Schicht des Modells SD durch eine infinitesimal dünne Schicht zu ersetzen, die näherungsweise die gleiche glättende Wirkung hat. Auf diese Weise entsteht das Zwischenmodell $S\delta$, aus dem später das Modell $S\delta_2$ hervorgeht, bei dem die dünne Schicht lateral inhomogen ist.

Der Einfluß der elektrischen Leitfähigkeit $\sigma(r)$ hängt stark vom Radius r ab, was sich deutlich an den Gewichtsfunktionen $w_n^R(r/c)$ zeigt (vgl. Abbildung 3.2, Seite 72), die zur Kern-Mantel-Grenze hin auf Null abfällt. Die elektrische Leitfähigkeit direkt an der Kern-Mantel-Grenze trägt daher nicht zu den Zeitkonstanten der radialen Komponente bei. Tatsächlich hat sie überhaupt keinen Einfluß auf die Säkularvariation der radialen Komponente. Folglich macht sich eine infinitesimal dünne Schicht direkt an der Kern-Mantel-Grenze nicht bemerkbar. Der physikalische Grund sind Spiegelströme im Kern, deren Magnetfeld das Feld der Schicht kompensiert. Dies erschwert eine Abschätzung der Leitfähigkeit in der D'' -Schicht.

Die harmonische Anregung und der δ -Impuls, die in Kapitel 2 und 3 betrachtet werden, sind zwar von grundsätzlicher Bedeutung, haben aber wenige Gemeinsamkeiten mit dem tatsächlichen zeitlichen Verlauf des Erdmagnetfeldes. In Kapitel 4 werden die zeitabhängigen Gauß-Koeffizienten an der Kern-Mantel-Grenze durch stationäre Gauß-Prozesse beschrieben, die einen zufälligen Verlauf erzeugen, wobei der Wert zu einem gegebenen Zeitpunkt von früheren Werten abhängt. Diese Korrelation wird durch einfache Autokovarianzfunktionen vorgegeben, nämlich für weißes Rauschen und rotes Rauschen, das durch die Korrelationszeit τ_k charakterisiert wird. Einerseits läßt sich der Einfluß des Mantels an einzelnen Realisierungen des stationären Gauß-Prozesses zeigen (vgl. Abbildung 4.6, Seite 106), andererseits lassen sich die stationären Gauß-Prozesse als solche mit Hilfe der Übertragungsfunktionen von der Kern-Mantel-Grenze an die Erdoberfläche fortsetzen, weil der Mantel als linearer Filter wirkt. Die Korrelationszeit eines Gauß-Koeffizienten an der Oberfläche kann näherungsweise aus der Korrelationszeit an der Kern-Mantel-Grenze und der Glättungszeit des Mantels bestimmt werden. Dabei zeigt sich, daß sich die Glättungszeit nur dann deutlich bemerkbar machen kann, wenn sie nicht kleiner ist als die Korrelationszeit an der Kern-Mantel-Grenze. Tatsächlich sind die Korrelationszeiten der Gauß-Koeffizienten, die man in der Literatur finden kann, erheblich länger als die Glättungszeiten der Modelle S und SD. Hongre et al. (1998) geben sie beispielsweise mit 666 a für $n = 1$ bzw. 51 a für $n = 10$ an (siehe Tabelle 4.1, Seite 91).

Kapitel 5 wendet sich schließlich dem Einfluß einer lateral inhomogenen Leitfähigkeitsverteilung zu, die durch das Modell $S\delta_2$ beschrieben wird. Motiviert wird diese Untersuchung durch die Spekulationen über die möglichen Ursachen für die beobachtete kleinere Säkularvariation im pazifischen Raum, die vor allem am Restfeld $n \geq 2$ zu beobachten ist (z. B. Backus et al., 1996), sowie durch die Vermutung, daß die elektrische Leitfähigkeit in der pazifischen Region sogar so groß ist, daß sie die Lage der Polwanderkurven der virtuellen geomagnetischen Pole (VGP) zu Zeiten von Feldumkehrungen beeinflussen kann (Costin und Buffett, 2004).

Um einen ersten Eindruck vom Einfluß der lateralen Inhomogenität zu erhalten, wird in Abschnitt 5.2 als Anregung der harmonische Dipol verwendet. Betrachtet werden der

G_1^1 - und der H_1^1 -Dipol mit der Zeitabhängigkeit $\sim \exp(i\omega t)$, für die $|B_r|$ an der Oberfläche berechnet wird. Dabei zeigt sich die stärkere Dämpfung in der pazifischen Hemisphäre. Im Fall des H_1^1 -Dipol wird das Feld zudem aus der pazifischen Hemisphäre herausgedrängt (vgl. Abbildung 5.7, Seite 123). Die Unterschiede zwischen den Hemisphären zeigen sich für Modell S δ_2 im Periodenbereich zwischen etwa $T = 0.8$ a und $T = 80$ a (vgl. Abbildung 5.5, Seite 121). Felder mit kleineren Perioden werden von beiden Hemisphären praktisch vollständig abgeschirmt, während Felder mit längeren Perioden den Mantel ungestört durchqueren können. Während die Abweichungen vom Dipolfeld an der Erdoberfläche bei $T = 25$ a noch deutlich ausfallen, sind sie bei $T = 80$ a nur beim G_1^1 -Dipol erkennbar und bereits so klein, daß sie beim Erdmagnetfeld von Beiträgen anderer Multipole überdeckt würden.

Anschließend werden in Abschnitt 5.3 die harmonischen Dipole, die beide in der Äquatorebene liegen und senkrecht aufeinander stehen, zu einem rotierenden Dipol zusammengefaßt, und B_r an der Oberfläche betrachtet (vgl. Abbildung 5.8, Seite 126). Dabei zeigt sich der Einfluß der Inhomogenität noch bei Perioden von $T = 250$ a, was vermutlich darauf zurückzuführen ist, daß bei der Darstellung von B_r im Unterschied zur Verwendung von $|B_r|$ die Phaseninformation nicht verlorengeht. Neben der stärkeren Dämpfung in der pazifischen Hemisphäre zeigen sich insbesondere an der Grenze zwischen den Hemisphären weitere Abweichungen vom Dipolfeld. Beim Übergang eines Extremums von B_r aus der schlechter leitenden atlantischen Hemisphäre in die besser leitende pazifische Hemisphäre werden die Isolinien von B_r zusammengestaucht, umgekehrt bleiben die Isolinien förmlich in der besser leitenden pazifischen Hemisphäre hängen, wenn sich ein Extremum von der pazifischen in die atlantische Hemisphäre bewegt (vgl. Abbildungen 5.9 bis 5.11 auf den Seiten 128 bis 130). Beide Effekte lassen sich mit der Lenzschen Regel erklären.

Der rotierende Dipol wird hier als einfaches Modell für Feldumkehrungen und Westdrift verwendet, auch wenn es eigentlich das Restfeld ($n \geq 2$) ist, das nach Westen driftet. Da die elektromagnetische Dämpfung für höhere Grade n kleiner ist, eignet sich der Dipol durchaus für Abschätzungen. Beide Phänomene laufen auf ähnlichen Zeitskalen ab. Während die Winkelgeschwindigkeit der Westdrift von ca. $0.3^\circ/a$ einer Periode von $T = 1200$ a entspricht, dauert die Drehung des Dipolfeldes um 180° während einer Feldumkehrung etwa 1000 a. Insgesamt läßt sich festhalten, daß das Modell S δ_2 trotz seiner sehr hohen elektrischen Leitfähigkeit – insbesondere in der pazifischen Hemisphäre – weder die Westdrift noch die Feldumkehrungen nennenswert dämpfen kann.

Walker und Backus (1996) weisen auf einen deutlichen Unterschied zwischen der atlantischen und pazifischen Hemisphäre hin. Sie mitteln B_r^2 für das Restfeld ($2 \leq n \leq 10$) über die atlantische und die pazifische Hemisphäre. Für das IGRF 2005 ergibt eine entsprechende Rechnung $\Delta_{\text{IGRF}} = \langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P = 53.7 \text{ } \mu\text{T}^2$. Dann vergleichen sie die Differenz mit Werten aus statistischen Modellen für die Gauß-Koeffizienten an der Erdoberfläche unter Annahme eines rotationsinvariantes Restfeldes. Die Gauß-Koeffizienten sind in diesem Modell normalverteilt mit dem Erwartungswert $E[g_n^m] = E[h_n^m] = 0$ und der Varianz $\text{Var}[g_n^m] = \text{Var}[h_n^m] = \sigma_n^2$. Aus dem Vergleich schließen Walker und Backus (1996), daß sich das Restfeld möglicherweise nicht gut durch ein rotationsinvariantes statistisches Modell darstellen läßt.

In Abschnitt 5.4.3 wird die Varianz der Differenz zwischen den Hemisphären $\sigma_D^2 = \text{Var}[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ direkt aus der Standardabweichung der Gauß-Koeffizienten σ_n berech-

net. Für ein statistisches Modell, das aus dem IGRF 2005 abgeleitet ist, erhält man für die Standardabweichung $\sigma_d = 33.58 \mu\text{T}^2$. Eine genauere Betrachtung der Verteilungsfunktion von $\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P$ des statistischen Modells zeigt, daß der Wert von Δ_{IGRF} in einem Signifikanztest auf 5 %-Niveau nicht zur Ablehnung der Hypothese führt, daß das Erdmagnetfeld durch ein rotationsinvariantes statistisches Modell beschrieben werden kann. Trotzdem ist der Unterschied bemerkenswert und führt zur Frage, ob solch ein Unterschied durch eine lateral inhomogene elektrische Leitfähigkeit im Mantel verursacht werden kann.

Der Einfluß einer lateralen Inhomogenität wird an Modell S δ_2 untersucht. Dazu wird geprüft, ob er stark genug ist, um nennenswerte Abweichungen von $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = 0$ zu verursachen, also dem Wert, der für rotationsinvariante Modelle gilt. Die in Kapitel 4 eingeführte statistische Anregung, die durch Gauß-Prozesse beschrieben wird, und die dort betrachtete Fortsetzung der Gauß-Prozesse von der Kern-Mantel-Grenze an die Oberfläche mit Hilfe von Übertragungsfunktionen werden benutzt, um $E[B_r^2]$ am Ort (ϑ, φ) an der Erdoberfläche zu ermitteln. Es wird gezeigt, daß sich daraus $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ ermitteln läßt. Der Wert von $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P]$ hängt vom statistischen Modell für die Anregung ab, wobei weißes Rauschen und rotes Rauschen mit der typischen Korrelationszeit τ_K betrachtet werden. Bei weißem Rauschen erhält man $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] = 69.4 \mu\text{T}^2$, also deutliche Abweichungen von einem rotationsinvarianten Leitfähigkeitsmodell. Für rotes Rauschen mit einer typischen Korrelationszeit von $\tau_K = 1$ a erhält man immer noch $48.8 \mu\text{T}^2$, aber für $\tau_K = 10$ a fällt der Wert bereits auf $5.3 \mu\text{T}^2$ ab, so daß er praktisch kaum von zufälligen Schwankungen zu unterscheiden sein dürfte (vgl. auch Abbildung 5.20, Seite 153). Für noch längere typische Korrelationszeiten τ_K gilt näherungsweise $E[\langle B_r^2 \rangle_A - \langle B_r^2 \rangle_P] \sim \tau_K^{-2}$, und der Unterschied zu einem lateral homogenen Mantel verschwindet schnell. Da realistische Werte für τ_K deutlich oberhalb von 10 a liegen, ist es praktisch unmöglich, die beobachtete Differenz Δ_{IGRF} durch eine laterale Inhomogenität der elektrischen Leitfähigkeit zu erklären.

Von den betrachteten Prozessen der Säkularvariation, der Westdrift, den Feldumkehrungen und den Jerks, werden also nur letztere von der elektrischen Leitfähigkeit des Mantels beeinflußt, weil sie auf Zeitskalen von der Größenordnung eines Jahres ablaufen.

Anhang A

Vektorformeln

Einige der wichtigsten in dieser Arbeit verwendeten Vektorformeln sind im folgenden als Referenz zusammengestellt. Ausführlichere Abhandlungen finden sich beispielsweise bei Weidelt (1972), Backus (1986) oder Backus et al. (1996).

Ableitungen

Für die Anwendung des Nabla-Operators gelten folgende Regeln, wie sie z. B. bei Jackson (1999) angegeben werden:

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{a}) = \mathbf{a} \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times (\psi \mathbf{a}) = \nabla \psi \times \mathbf{a} + \psi \nabla \times \mathbf{a} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\nabla \times \mathbf{b}) \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \nabla \psi = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0 \quad (\text{A.7})$$

In der letzten Gleichung ist $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ein beliebiger Ortsvektor.

Sphärische Koordinaten

Diese Arbeit verwendet hauptsächlich sphärische Koordinaten (r, ϑ, φ) , wie sie in Abbildung A.1 zusammen in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt sind. Die kartesischen Koordinaten hängen gemäß

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ x_2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ x_3 &= r \cos \vartheta \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

mit den sphärischen Koordinaten zusammen.

Die Darstellung der sphärischen Einheitsvektoren durch die kartesischen Einheitsvektoren ist

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{x}}_1 \sin \vartheta \cos \varphi + \hat{\mathbf{x}}_2 \sin \vartheta \sin \varphi + \hat{\mathbf{x}}_3 \cos \vartheta, \\ \hat{\boldsymbol{\vartheta}} &= \hat{\mathbf{x}}_1 \cos \vartheta \cos \varphi + \hat{\mathbf{x}}_2 \cos \vartheta \sin \varphi - \hat{\mathbf{x}}_3 \sin \vartheta, \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\hat{\mathbf{x}}_1 \sin \varphi + \hat{\mathbf{x}}_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

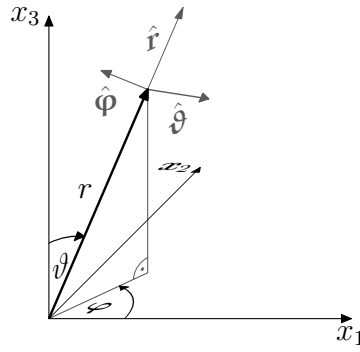


Abbildung A.1: Sphärische Koordinaten r , ϑ , φ und Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ in einem kartesischen Koordinatensystem

Und für die Ableitungen der sphärischen Einheitsvektoren nach r , ϑ und φ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} &= 0, & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \hat{\mathbf{r}} &= \hat{\boldsymbol{\vartheta}}, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{r}} &= \hat{\boldsymbol{\varphi}} \sin \vartheta, \\ \frac{\partial}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\vartheta}} &= 0, & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \hat{\boldsymbol{\vartheta}} &= -\hat{\mathbf{r}}, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\vartheta}} &= \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cos \vartheta, \\ \frac{\partial}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= 0, & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= 0, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\hat{\mathbf{r}} \sin \vartheta - \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Nabla-Operator

Der Nabla-Operator $\boldsymbol{\nabla}$ ist ein Differential-Operator, der in kartesischen Koordinaten gegeben ist durch

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\mathbf{x}}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{x}}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\mathbf{x}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\text{A.11})$$

und in sphärischen durch

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (\text{A.12})$$

Eng verwandt mit dem Nabla-Operator $\boldsymbol{\nabla}$ ist der Laplace-Operator ∇^2 , der in kartesischen Koordinaten als

$$\nabla^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (\text{A.13})$$

geschrieben werden kann. In sphärischen Koordinaten ist der Laplace-Operator

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (\text{A.14})$$

wobei in der Literatur für den ersten Term des Operators auch die Darstellung

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \quad (\text{A.15})$$

verwendet wird. Die Äquivalenz der beiden Ausdrücke läßt sich leicht prüfen, es ist

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\psi + r \frac{\partial}{\partial r} \psi \right) = \frac{1}{r} \left(2 \frac{\partial}{\partial r} \psi + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \psi \right). \quad (\text{A.16})$$

Λ -Operator

Der Λ -Operator wird beispielsweise bei Backus et al. (1996) definiert als

$$\Lambda := \mathbf{r} \times \nabla. \quad (\text{A.17})$$

In sphärischen Koordinaten erhält man mit Gleichung (A.12)

$$\Lambda = -\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \vartheta}. \quad (\text{A.18})$$

Der Λ -Operator besitzt keine radiale Komponente und keine Ableitungen nach r . Für eine Funktion f , die nur von r abhängt, gilt speziell

$$\Lambda f(r) = 0. \quad (\text{A.19})$$

Mit den Gleichungen (A.10) folgt, daß

$$\frac{\partial}{\partial r} \Lambda \psi(\mathbf{r}) = \Lambda \frac{\partial}{\partial r} \psi(\mathbf{r}) \quad (\text{A.20})$$

ist. Neben der Schreibweise des Λ -Operators in Gleichung (A.17) gibt es die alternative Darstellung

$$\Lambda = -\nabla \times \mathbf{r}, \quad (\text{A.21})$$

die man mit Hilfe der Gleichungen (A.2) und (A.7) sowie der Beziehung

$$\begin{aligned} -\nabla \times (\mathbf{r}\psi) &= -\nabla \psi \times \mathbf{r} - \psi \nabla \times \mathbf{r} \\ &= \mathbf{r} \times \nabla \psi \\ &= \Lambda \psi \end{aligned}$$

erhält. Aus $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} = 0$ folgt mit Gleichung (A.21) unmittelbar

$$\nabla \cdot \Lambda \psi = 0. \quad (\text{A.22})$$

Analog zum Laplace-Operator kann der Operator $\Lambda^2 = \Lambda \cdot \Lambda$ eingeführt werden, dessen Darstellung in sphärischen Koordinaten ist

$$\Lambda^2 = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{A.23})$$

Gleichung (A.23) folgt aus Gleichung (A.18) unter Beachtung der Gleichungen (A.9), wie die folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
\Lambda^2 &= \left(-\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \left(-\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\
&= \frac{\hat{\boldsymbol{\vartheta}}}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \frac{\hat{\boldsymbol{\vartheta}}}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) - \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\vartheta}}}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\
&= \frac{\hat{\boldsymbol{\vartheta}}}{\sin^2 \vartheta} \left(\hat{\boldsymbol{\phi}} \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\hat{\boldsymbol{\vartheta}}}{\sin \vartheta} \left[\left(-\hat{\mathbf{r}} \sin \vartheta - \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \cos \vartheta \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right] \\
&\quad - \hat{\boldsymbol{\phi}} \left(-\hat{\mathbf{r}} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \left(\hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \\
&= \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \\
&= \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right).
\end{aligned}$$

Der Vergleich der Gleichungen (A.23) und (A.13) offenbart den engen Zusammenhang zwischen dem Λ^2 -Operator und dem Laplace-Operator, denn es ist

$$\Lambda^2 = r^2 \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (\text{A.24})$$

Da der Λ^2 -Operator – genauso wie der Λ -Operator – keine Ableitungen nach r beinhaltet, gilt für eine Funktion $f(r)$

$$\Lambda^2 f(r) = 0. \quad (\text{A.25})$$

Die Eigenfunktionen des Λ^2 -Operators sind die Kugelflächenfunktionen

$$S_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=0}^n \left[A_n^m \cos(m\varphi) + B_n^m \sin(m\varphi) \right] P_n^m(\cos \vartheta), \quad (\text{A.26})$$

für die

$$\Lambda^2 S_n(\vartheta, \varphi) = -n(n+1) S_n(\vartheta, \varphi) \quad (\text{A.27})$$

gilt (z. B. Backus et al., 1996). Gleichung (A.27) gilt speziell für die in den Gleichungen (2.60) und (2.61) eingeführten Funktionen Y_n^m :

$$\Lambda^2 Y_n^m(\vartheta, \varphi) = -n(n+1) Y_n^m(\vartheta, \varphi). \quad (\text{A.28})$$

Der Λ -Operator läßt sich mit dem Laplace-Operator vertauschen, d. h. es ist

$$\nabla^2 \Lambda \psi = \Lambda \nabla^2 \psi, \quad (\text{A.29})$$

wie kurz gezeigt werden soll. Für die Herleitung von Gleichung (A.29) ist zum einen die Schreibweise

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \hat{\mathbf{x}}_k, \quad (\text{A.30})$$

mit

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i,j,k \text{ zyklisch aus } 1,2,3, \\ -1 & \text{falls } i,j,k \text{ antizyklisch aus } 1,2,3, \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen,} \end{cases}$$

für das Kreuzprodukt in kartesischen Koordinaten hilfreich, und zum anderen wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \psi \right) &= \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi + \delta_{\ell i} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi \right) \\ &= x_i \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi + 2\delta_{\ell i} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

benötigt. Damit kann gezeigt werden, daß

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{\Lambda} \psi &= \nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla \psi) \\ &\stackrel{(\text{A.30})}{=} \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \psi \right) \hat{\mathbf{x}}_k \\ &\stackrel{(\text{A.31})}{=} \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_i \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \psi \right) \hat{\mathbf{x}}_k \right] + 2 \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sum_{\ell=1}^3 \delta_{\ell i} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \psi \right) \hat{\mathbf{x}}_k \right] \\ &= \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} \psi \right) \right] \hat{\mathbf{x}}_k + 2 \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \psi \right) \right] \hat{\mathbf{x}}_k \\ &\stackrel{(\text{A.30})}{=} \mathbf{r} \times \nabla (\nabla^2 \psi) + 2 \nabla \times \nabla \psi \\ &\stackrel{(\text{A.17})}{=} \mathbf{\Lambda} \nabla^2 \psi \end{aligned}$$

ist.

Die Rotation und der $\mathbf{\Lambda}$ -Operator lassen sich hingegen nicht vertauschen, vielmehr gilt

$$\nabla \times \mathbf{\Lambda} \psi = \mathbf{r} \nabla^2 \psi - \nabla \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right]. \quad (\text{A.32})$$

Um dies zu zeigen benötigt man erstens, daß

$$\nabla \cdot (\mathbf{r}\psi) = \mathbf{r} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \mathbf{r} = r \frac{\partial}{\partial r} \psi + 3\psi = \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) + 2\psi \quad (\text{A.33})$$

ist, und zweitens, daß

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\mathbf{r}\psi) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\mathbf{r}\psi) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi + \hat{\mathbf{x}}_i \psi \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{r} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \psi + 2 \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \psi \right) = \mathbf{r} \nabla^2 \psi + 2 \nabla \psi \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

gilt. Mit den Gleichungen (A.33) und (A.34) kann die Gültigkeit von Gleichung (A.32) gezeigt werden. Es ist

$$\nabla \times \mathbf{\Lambda} \psi \stackrel{(\text{A.21})}{=} -\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\psi) \stackrel{(\text{A.6})}{=} \nabla^2 (\mathbf{r}\psi) - \nabla [\nabla \cdot (\mathbf{r}\psi)] = \mathbf{r} \nabla^2 \psi - \nabla \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right].$$

Gleichung (A.32) nimmt in sphärischen Koordinaten die Form

$$\nabla \times \mathbf{A}\psi = \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r} \Lambda^2 \psi - \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) - \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \quad (\text{A.35})$$

an, wie kurz gezeigt werden soll. Aus Gleichung (A.24) folgt mit Gleichung (A.16), wenn man den Gradienten in Komponenten schreibt, siehe Gleichung (A.12),

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A}\psi &\stackrel{(\text{A.24})}{=} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \left[\Lambda^2 \psi + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \psi \right) \right] - \nabla \left(\frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) \\ &\stackrel{(\text{A.16})}{=} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \left[\Lambda^2 \psi + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) \right] - \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{\hat{\boldsymbol{\vartheta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) - \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \\ &= \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r} \Lambda^2 \psi - \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) - \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi). \end{aligned}$$

Aus Gleichung (A.35) folgt durch Multiplikation mit \mathbf{r}

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{A}\psi = r^2 \nabla^2 \psi - r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) = \Lambda^2 \psi. \quad (\text{A.36})$$

Schließlich sei noch angeführt, daß aus Gleichung (A.32) zusammen mit den Gleichungen (A.29) und (A.6) folgt, daß

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}\psi = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}\psi) - \nabla^2 \mathbf{A}\psi = -\mathbf{A} \nabla^2 \psi. \quad (\text{A.37})$$

Anhang B

Realisierung stationärer Gauß-Prozesse

Realisierungen stationärer Gauß-Prozesse lassen sich einfach und schnell simulieren, weil sich ihre Berechnung auf diskrete Fourier-Transformationen und Multiplikationen mit normalverteilten Zufallszahlen zurückführen läßt, siehe z. B. Ripley (1987), Davies und Harte (1987), Dietrich und Newsam (1997) oder Davies (2001). Die Schritte zur Ermittlung einer Realisierung werden im folgenden kurz vorgestellt, und anschließend wird gezeigt, daß das Ergebnis tatsächlich einen Ausschnitt aus einer Realisierung wiedergibt.

Für den diskreten stationären Gauß-Prozeß Ξ_i gelte $\Xi_i \in \mathcal{N}(0, \sigma)$ für $i = 0, 1, \dots, n$. Gesucht ist eine Realisierung $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T$ des stationären Gauß-Prozesses Ξ_i . Dabei wird die Autokovarianzfunktion $R_{|p-q|} = E[x_p x_q]$ für $p, q = 0, 1, \dots, n$ vorgegeben, insbesondere gilt $R_0 = \sigma^2$.

Der Algorithmus zur Ermittlung einer Realisierung \mathbf{x} ist wie folgt (Dietrich und Newsam, 1997):

1. Es wird der Vektor

$$\mathbf{s} := (R_0, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}, R_n, R_{n-1}, \dots, R_2, R_1)^T \in \mathbb{R}^{2n} \quad (\text{B.1})$$

aus der vorgegebenen Autokovarianzfunktion konstruiert. Anschließend wird die diskrete Fourier-Transformation $\mathbf{S} = (S_0, S_1, \dots, S_{2n-1})^T$ von \mathbf{s} gebildet, mit

$$S_j = \sum_{k=0}^{2n-1} s_k e^{-i\omega_j t_k} \quad , \quad j = 0, 1, \dots, 2n-1 \quad , \quad (\text{B.2})$$

wobei zur kürzeren Schreibweise $\omega_j := 2\pi j$ und $t_k := k/(2n)$ eingeführt werden. Da die s_k reell und symmetrisch sind, sind die S_j ebenfalls reell und symmetrisch. Davies und Harte (1987) sowie Dietrich und Newsam (1997) weisen darauf hin, daß die Bedingung

$$S_j \geq 0 \quad , \quad j = 0, 1, \dots, 2n-1, \quad (\text{B.3})$$

erfüllt sein muß, damit das Verfahren korrekt arbeitet.

2. Im nächsten Schritt werden unabhängige normalverteilte Zufallszahlen $\alpha_j \in \mathcal{N}(0, 1)$ und $\beta_j \in \mathcal{N}(0, 1)$, $j = 0, 1, \dots, 2n-1$, ermittelt und daraus die komplexen Zufallszahlen

$$Y_j = \alpha_j + i\beta_j \quad (\text{B.4})$$

gebildet.

3. Aus den Y_j und S_j wird der Vektor $\mathbf{Z} = (Z_0, Z_1, \dots, Z_{2n-1})^T$ mit

$$Z_j = \sqrt{\frac{S_j}{2n}} Y_j \quad (\text{B.5})$$

gebildet, wobei die positive Wurzel gewählt wird.

4. Die diskrete Fourier-Transformation $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{2n-1})^T$ von \mathbf{Z} wird berechnet:

$$z_k = \sum_{j=0}^{2n-1} Z_j e^{-i\omega_j t_k} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{j=0}^{2n-1} \sqrt{S_j} Y_j e^{-i\omega_j t_k} . \quad (\text{B.6})$$

Anschließend werden reelle Vektoren $\boldsymbol{\xi}$ und $\boldsymbol{\eta}$ mit $\xi_k = \text{Re}\{z_k\}$ bzw. $\eta_k = \text{Im}\{z_k\}$, $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$, eingeführt.

5. Wählt man für die Elemente des Vektors \mathbf{x} die ersten $n + 1$ Elemente von $\boldsymbol{\xi}$ oder $\boldsymbol{\eta}$, also entweder $x_i = \xi_i$ oder $x_i = \eta_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, dann erfüllt \mathbf{x} die eingangs gestellten Bedingungen und ist eine Realisierung des stationären Gauß-Prozesses Ξ_i .

Daß es sich tatsächlich um eine Realisierung des stationären Gauß-Prozesses Ξ_i handelt, soll im folgenden skizziert werden. Es genügt zu zeigen, daß

- a) die ξ_k und η_k normalverteilt sind,
- b) $E[\xi_k] = E[\eta_k] = 0$ ist und daß
- c) $E[\xi_p \xi_q] = E[\eta_p \eta_q] = s_{|p-q|}$, $p, q = 0, 1, \dots, 2n - 1$.

Die Eigenschaften a und b sind direkt auf die x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, übertragbar. Die Bedingung c bedeutet nach Definition von \mathbf{s} , daß $E[x_p x_q] = R_{|p-q|}$ erfüllt ist. Hier zeigt sich, warum nur $n + 1$ der $2n$ Elemente der Vektoren $\boldsymbol{\xi}$ bzw. $\boldsymbol{\eta}$ verwendet werden können. Würde man zusätzlich $x_{n+1} = \xi_{n+1}$ dem Vektor \mathbf{x} hinzufügen, dann wäre $E[x_{n+1} x_0] = E[\xi_{n+1} \xi_0] = s_{n+1} = R_{n-1}$, und das trifft im allgemeinen nicht zu.

Zu a) Setzt man Gleichung (B.4) in Gleichung (B.6) ein, dann erhält man

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{j=0}^{2n-1} \sqrt{S_j} (\alpha_j + i\beta_j) e^{-i\omega_j t_k} . \quad (\text{B.7})$$

Die z_k sind gewichtete Summen der α_j und β_j . Folglich sind auch die ξ_k und η_k als Real- bzw. Imaginärteil von z_k durch Summen von α_j und β_j darstellbar. Da die α_j und β_j nach Voraussetzung normalverteilt und unabhängig sind, sind schließlich auch die ξ_k und η_k normalverteilt (allerdings nicht mehr unabhängig).

Zu b) Aus Gleichung (B.7) folgt wegen der Linearität des Erwartungswerts, daß $E[z_k] = 0$ gilt, weil nach Voraussetzung $E[\alpha_j] = E[\beta_j] = 0$ ist. Aus $E[z_k] = E[\xi_k] + iE[\eta_k]$ für $k = 0, 1, \dots, n$ folgt unmittelbar $E[\xi_k] = E[\eta_k] = 0$.

Zu c) Für die Kovarianzen von Y_j und \bar{Y}_j , dem komplex Konjugierten von Y_j , erhält man wegen der Unabhängigkeit der α_j und β_j zunächst

$$\begin{aligned} E[Y_k Y_\ell] &= E[\alpha_k \alpha_\ell] - E[\beta_k \beta_\ell] + i E[\beta_k \alpha_\ell] + i E[\alpha_k \beta_\ell] = 0 , \\ E[\bar{Y}_k \bar{Y}_\ell] &= E[\alpha_k \alpha_\ell] - E[\beta_k \beta_\ell] - i E[\beta_k \alpha_\ell] - i E[\alpha_k \beta_\ell] = 0 , \\ E[\bar{Y}_k Y_\ell] &= E[\alpha_k \alpha_\ell] + E[\beta_k \beta_\ell] - i E[\beta_k \alpha_\ell] + i E[\alpha_k \beta_\ell] = 2\delta_{kl} , \\ E[Y_k \bar{Y}_\ell] &= E[\alpha_k \alpha_\ell] + E[\beta_k \beta_\ell] + i E[\beta_k \alpha_\ell] - i E[\alpha_k \beta_\ell] = 2\delta_{kl} . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Damit können in einem weiteren Zwischenschritt die Kovarianzen von z_k und \bar{z}_k angegeben werden. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[z_p z_q] &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{\ell=0}^{2n-1} \sqrt{S_k S_\ell} \mathbb{E}[Y_k Y_\ell] e^{-i(\omega_k t_p + \omega_\ell t_q)} = 0 , \\ \mathbb{E}[\bar{z}_p \bar{z}_q] &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{\ell=0}^{2n-1} \sqrt{S_k S_\ell} \mathbb{E}[\bar{Y}_k \bar{Y}_\ell] e^{i(\omega_k t_p + \omega_\ell t_q)} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Setzt man o. B. d. A. im folgenden $p \geq q$ voraus, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{z}_p z_q] &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{\ell=0}^{2n-1} \sqrt{S_k S_\ell} \mathbb{E}[\bar{Y}_k Y_\ell] e^{i(\omega_k t_p - \omega_\ell t_q)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} S_k e^{i\omega_k(t_p - t_q)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{2n-1} s_\ell \sum_{k=0}^{2n-1} e^{-i\omega_k t_\ell} e^{i\omega_k(t_p - t_q)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{2n-1} s_\ell \sum_{k=0}^{2n-1} e^{-i2\pi k \frac{p-q-\ell}{2n}} \\ &= 2 \sum_{\ell=0}^{2n-1} s_\ell \delta_{\ell, (p-q)} \\ &= 2 s_{p-q} . \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Dabei wird verwendet, daß für die geometrische Reihe mit $r \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{\ell=0}^L e^{i\frac{2\pi}{L} r \ell} = \begin{cases} L & \text{für } r = nL \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \\ \frac{e^{i2\pi r} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{L} r} - 1} = 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

gilt. Für $p < q$ erhält man analog

$$\mathbb{E}[\bar{z}_p z_q] = 2 \sum_{\ell=0}^{2n-1} s_\ell \delta_{\ell, 2n-(q-p)} = 2 s_{q-p} . \quad (\text{B.12})$$

Damit gilt für beliebige p und q

$$\mathbb{E}[\bar{z}_p z_q] = 2 s_{|p-q|} \quad (\text{B.13})$$

und damit auch

$$\mathbb{E}[z_p \bar{z}_q] = 2 s_{|p-q|} . \quad (\text{B.14})$$

Die Kovarianzen von z_k und \bar{z}_k können andererseits durch die Kovarianzen von ξ_k und η_k dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[z_p z_q] &= \mathbb{E}[\xi_p \xi_q] - \mathbb{E}[\eta_p \eta_q] + i\mathbb{E}[\eta_p \xi_q] + i\mathbb{E}[\xi_p \eta_q] = 0 , \\ \mathbb{E}[\bar{z}_p \bar{z}_q] &= \mathbb{E}[\xi_p \xi_q] - \mathbb{E}[\eta_p \eta_q] - i\mathbb{E}[\eta_p \xi_q] - i\mathbb{E}[\xi_p \eta_q] = 0 , \\ \mathbb{E}[z_p \bar{z}_q] &= \mathbb{E}[\xi_p \xi_q] + \mathbb{E}[\eta_p \eta_q] + i\mathbb{E}[\eta_p \xi_q] - i\mathbb{E}[\xi_p \eta_q] = 2s_{|p-q|} , \\ \mathbb{E}[\bar{z}_p z_q] &= \mathbb{E}[\xi_p \xi_q] + \mathbb{E}[\eta_p \eta_q] - i\mathbb{E}[\eta_p \xi_q] + i\mathbb{E}[\xi_p \eta_q] = 2s_{|p-q|} . \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (B.15) liefert schließlich das gesuchte Ergebnis

$$E[\xi_p \xi_q] = E[\eta_p \eta_q] = s_{|p-q|} \quad (\text{B.16})$$

und nebenbei

$$E[\xi_p \eta_q] = E[\eta_p \xi_q] = 0 . \quad (\text{B.17})$$

Damit ist \mathbf{x} mit entweder $x_i = \xi_i$ oder $x_i = \eta_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, eine Realisierung des stationären Gauß-Prozesse Ξ_i .

Bisher wird die Bedingung $S_j \geq 0$, Gleichung (B.3), an die S_j nicht verwendet. Dietrich und Newsam (1997) leiten diese Bedingung aus der Forderung her, daß die Autokovarianzmatrix mit den Elementen $R_{pq} = R_{|p-q|}$ positiv semidefinit sein muß. Anschaulich läßt sich die Forderung $S_j \geq 0$ begründen, wenn man zunächst die kontinuierliche Autokovarianzfunktion $R_x(u)$ einer Funktion $x(t)$ betrachtet. Das Spektrum $I_x(\omega)$ ist nach dem Transformationstheorem von Wiener und Chintschin gleich der Fourier-Transformation der Autokovarianzfunktion $R_x(u)$ und ist eine nichtnegative Funktion, was formal an der Beziehung

$$I_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (\text{B.18})$$

(Blackman und Tukey, 1958; Buttkus, 1991) zu erkennen ist. Der Vektor \mathbf{S} ist nach Gleichung (B.2) die diskrete Fourier-Transformation des Vektors \mathbf{s} . Da es sich bei den s_k , $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$ um die Autokovarianzen handelt, können die S_j , $j = 0, 1, \dots, 2n - 1$ als Spektrum interpretiert werden. Aus der allgemeinen Eigenschaft, daß das Spektrum nichtnegativ ist, ergibt sich die Forderung $S_j \geq 0$. Diese Sichtweise legt auch die Hoffnung nahe, daß bei der Diskretisierung vieler kontinuierlicher Autokovarianzfunktion $R_x(u)$ die Forderung $S_j \geq 0$ durch eine geeignete Wahl der Stützstellen im Zeitbereich erfüllbar ist. Dietrich und Newsam (1997) zeigen in mehreren Sätzen, welche Bedingungen Autokovarianzfunktionen $R(u)$ und Stützstellen erfüllen müssen, damit die Forderung $S_j \geq 0$ erfüllt ist. Unter den Beispielen findet sich neben anderen Funktionen auch die diskrete Gauß-Kurve

$$R_k = e^{-k^2/(2\tau^2)}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (\text{B.19})$$

wobei τ eine positive reelle Konstante ist. Sie beweisen, daß die Forderung $S_j \geq 0$ für $\tau \geq 1/\sqrt{2\pi}$ und $n \geq 2\sqrt{\pi} \tau^2$ erfüllt ist. Sie merken an, daß sich diese Grenze für n in der Praxis als übermäßig pessimistisch erweist. Ähnlich verhält es sich mit der Anmerkung von Davies (2001), daß sich die Bedingung $S_j \geq 0$ durch die Wahl eines größeren Wertes für n in der praktischen Anwendung immer erfüllen läßt. Abbildung B.1 zeigt exemplarisch eine Realisierung \mathbf{x} , für die die Autokovarianzfunktion in Gleichung (B.19) mit $\tau = 20$ und $n = 1500$ verwendet wird. Die Werte x_i sind als Punkte dargestellt, die nicht verbunden sind, damit die Diskretisierung klar erkennbar ist.

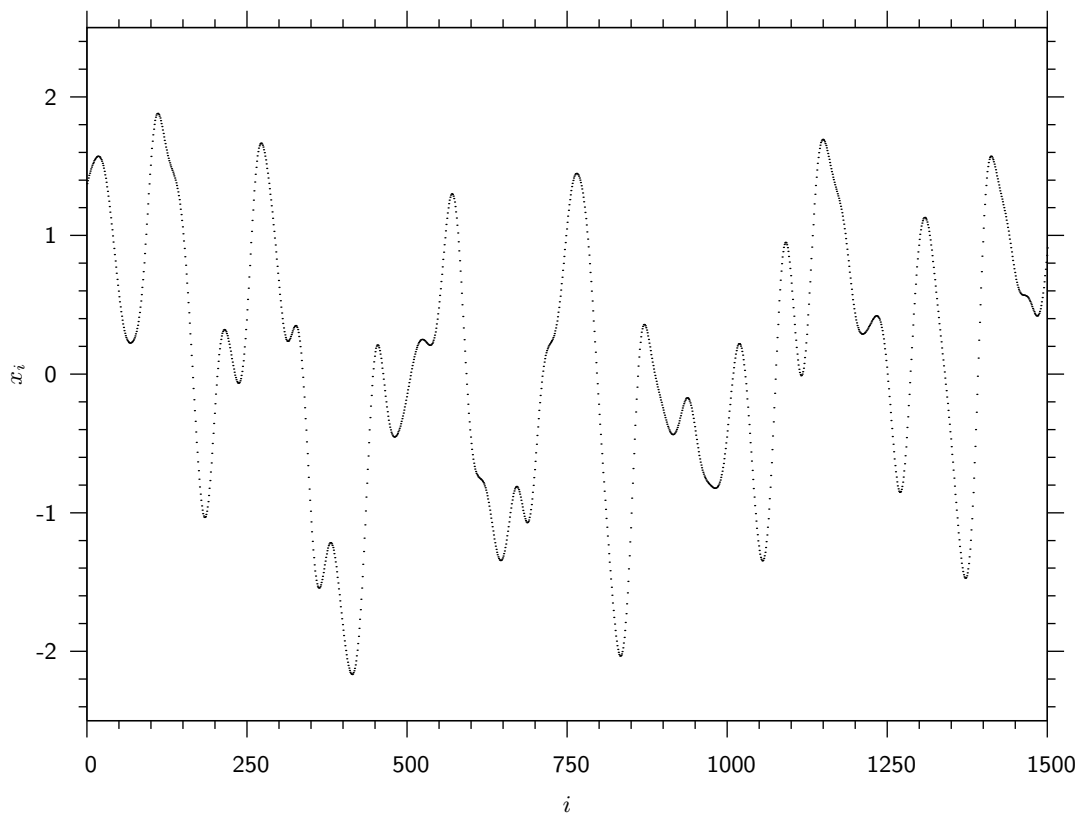


Abbildung B.1: Dargestellt ist eine Realisierung \mathbf{x} des stationären Gauß-Prozesses Ξ_i , für den die Autokovarianzfunktion $R_k = e^{-k^2/(2\tau^2)}$ mit $\tau = 20$ vorgegeben ist und der den Erwartungswert $E[\Xi_i] = 0$ besitzt. Die Elemente x_i des Vektors \mathbf{x} sind als Punkte über dem Index i aufgetragen.

Literatur

- Abramowitz, M. und Stegun, I. A., 1965. Handbook of mathematical functions. Dover Publications, New York.
- Achache, J., Le Mouél, J. L. und Courtillot, V., 1981. Long-period geomagnetic variations and mantle conductivity: an inversion using Bailey's method. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Bd. 65, 579–601.
- Alexandrescu, M., Gibert, D., Hulot, G., Le Mouél, J.-L. und Saracco, G., 1996. Worldwide wavelet analysis of geomagnetic jerks. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 101(B10), 21 975–21 994.
- Allredge, L. R., 1977. Deep mantle conductivity. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 82(33), 5427–5431.
- Anderson, D. L., 1989. *Theory of the Earth*. Blackwell Scientific Publications, Boston.
- Backus, G., 1986. Poloidal and toroidal fields in geomagnetic field modeling. *Reviews of Geophysics*, Bd. 24(1), 75–109.
- Backus, G., Parker, R. und Constable, C., 1996. *Foundations of Geomagnetism*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Backus, G. E., 1983. Application of mantle filter theory to the magnetic jerk of 1969. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Bd. 74, 713–746.
- Ballani, L., Greiner-Mai, H. und Stromeier, D., 2002. Determining the magnetic field in the core-mantle boundary zone by non-harmonic downward continuation. *Geophysical Journal International*, Bd. 149, 374–389.
- Bendat, J. S. und Piersol, A. G., 1971. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. Wiley-Interscience, New York.
- Benton, E. R. und Whaler, K. A., 1983. Rapid diffusion of the poloidal geomagnetic field through the weakly conducting mantle: a perturbation solution. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Bd. 75, 77–100.
- Blackman, R. B. und Tukey, J. W., 1958. *The measurement of power spectra*. Dover Publications, New York.
- Bloxham, J., Zatman, S. und Dumberry, M., 2002. The origin of geomagnetic jerks. *Nature*, Bd. 420, 65–68.

- Boehler, R., 1996. Melting temperature of the Earth's mantle and core: Earth's thermal structure. *Annual Review of Earth and Planetary Science*, Bd. 24, 15–40.
- Bott, M. H. P., 1982. *The Interior of the Earth: its structure, constitution and evolution*. 2. Aufl. Edward Arnold, London.
- Buffett, B. A., Garnero, E. J. und Jeanloz, R., 2000. Sediments at the top of Earth's core. *Science*, Bd. 290, 1338–1342.
- Buttkus, B., 1991. *Spektralanalyse und Filtertheorie in der angewandten Geophysik*. Springer Verlag, Berlin.
- Chapman, S. und Bartels, J., 1962. *Geomagnetism*. Oxford University Press, Oxford.
- Constable, C. G. und Parker, R. L., 1988. Statistics of the geomagnetic secular variation for the past 5 m.y. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 93(B10), 11 569–11 581.
- Constable, S., 1993. Constraints on mantle electrical conductivity from field and laboratory measurements. *Journal of Geomagnetism and Geoelectricity*, Bd. 45, 707–728.
- Costin, S. O. und Buffett, B. A., 2004. Preferred reversal paths caused by a heterogeneous conducting layer at the base of the mantle. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 109(B18), B06 101.
- Courant, R. und Hilbert, D., 1993. *Methoden der mathematischen Physik*. 4. Aufl. Springer Verlag, Heidelberg.
- Currie, R. G., 1968. Geomagnetic spectrum of internal origin and lower mantle conductivity. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 73(8), 2779–2786.
- Davies, R. B., 2001. Simulation of a stationary Gaussian time-series. <http://www.robertnz.net/pdf/StatGaus.pdf>.
- Davies, R. B. und Harte, D. S., 1987. Tests for Hurst effect. *Biometrika*, Bd. 74(1), 95–101.
- De Santis, A., Barraclough, D. R. und Tozzi, R., 2003. Spatial and temporal spectra of the geomagnetic field and their scaling properties. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Bd. 135, 125–134.
- Dietrich, C. R. und Newsam, G. N., 1997. Fast and exact simulation of stationary Gaussian processes through circulant embedding of the covariance matrix. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Bd. 18(4), 1088–1107.
- Dubrovinsky, L., Dubrovinskaia, N., Langenhorst, F., Dobson, D., Rubie, D., Geßmann, C., Abrikosov, I. A., Johansson, B., Baykov, V. I., Vitos, L., Le Bihan, T., Crichton, W. A., Dmitriev, V. und Weber, H.-P., 2003. Iron-silica interaction at extreme conditions and the electrically conducting layer at the base of Earth's mantle. *Nature*, Bd. 422, 58–61.

- Ducruix, J., Courtillot, V. und Le Mouél, J.-L., 1980. The late 1960s secular variation impulse, the eleven year magnetic variation and the electrical conductivity of the deep mantle. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Bd. 61, 73–94.
- Dziewonski, A. M. und Anderson, D. L., 1981. Preliminary reference Earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Bd. 25, 297–356.
- Everett, M. E. und Schultz, A., 1996. Geomagnetic induction in a heterogeneous sphere: azimuthally symmetric test computations and the response of an undulating 660-km discontinuity. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 101(B2), 2765–2783.
- Fainberg, E. B., Kuvshinov, A. V. und Singer, B. S., 1990a. Electromagnetic induction in a spherical Earth with non-uniform oceans and continents in electric contact with the underlying medium – I. Theory, method and example. *Geophysical Journal International*, Bd. 102, 273–281.
- Fainberg, E. B., Kuvshinov, A. V. und Singer, B. S., 1990b. Electromagnetic induction in a spherical Earth with non-uniform oceans and continents in electric contact with the underlying medium – II. Bimodal global geomagnetic sounding of the lithosphere. *Geophysical Journal International*, Bd. 102, 283–286.
- Fainberg, E. B. und Singer, B. S., 1980. Electromagnetic induction in a non-uniform spherical model of the Earth. *Annales Geophysicae*, Bd. 36, 127–134.
- Fisz, M., 1958. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- Fowler, C. M. R., 1990. *The Solid Earth – An Introduction to Global Geophysics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Gibert, D., Holschneider, M. und Le Mouél, J.-L., 1998. Wavelet analysis of the Chandler wobble. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 103(B11), 27 069–27 089.
- Gnedenko, B. W., 1991. *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. Akademie Verlag, Berlin.
- Greulich, W. (Hg.), 1998. *Lexikon der Physik*. Spektrum, Heidelberg.
- Holme, R., 1998. Electromagnetic core-mantle coupling – I. Explaining decadal changes in the length of day. *Geophysical Journal International*, Bd. 132, 167–180.
- Holme, R. und de Viron, O., 2005. Geomagnetic jerks and a high-resolution length-of-day profile for core studies. *Geophysical Journal International*, Bd. 160, 435–439.
- Hongre, L., Hulot, G. und Khokhlov, A., 1998. An analysis of the geomagnetic field over the past 2000 years. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Bd. 106, 311–335.
- Honkura, Y. und Matsushima, M., 1998. Electromagnetic response of the mantle to long-period geomagnetic variations over the globe. *Earth, Planets and Space*, Bd. 50, 651–662.

- Hulot, G. und Le Mouél, J.-L., 1994. A statistical approach to the Earth's main magnetic field. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Bd. 82, 167–183.
- Jackson, J. D., 1999. *Classical Electrodynamics*. 3. Aufl. Wiley, New York.
- Jault, D. und Le Mouél, J. L., 1991. Exchange of angular momentum between the core and the mantle. *Journal of Geomagnetism and Geoelectricity*, Bd. 43, 111–129.
- Jeanloz, R., 1993. The mantle in sharper focus. *Nature*, Bd. 365, 110–111.
- Jeanloz, R. und Romanowicz, B., 1997. Geophysical dynamics at the center of the Earth. *Physics Today*, Bd. 50, 22–27.
- Johnson, C. L. und Constable, C. G., 1998. Persistently anomalous Pacific geomagnetic fields. *Geophysical Research Letters*, Bd. 25(7), 1011–1014.
- Joos, G., 1989. *Lehrbuch der theoretischen Physik*. 15. Aufl. Aula-Verlag, Wiesbaden.
- Kerr, R. A., 2000. Core takes a page from the sea floor. *Science*, Bd. 290, 1274–1275.
- Kertz, W., 1969. *Einführung in die Geophysik*, Bd. 1. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim.
- Kuvshinov, A. V., Avdeev, D. B. und Pankratov, O. V., 1999. Global induction by Sq and Dst sources in the presence of oceans: bimodal solutions for non-uniform spherical surface shells above radially symmetric Earth models in comparison to observations. *Geophysical Journal International*, Bd. 137, 630–650.
- Lambert, J. H., 1772. *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*. Dritter Theil. Verlag der Buchhandlung der Realschule, Berlin.
- Le Huy, M., Alexandrescu, M., Hulot, G. und Le Mouél, J.-L., 1998. On the characteristics of successive geomagnetic jerks. *Earth, Planets and Space*, Bd. 50, 723–732.
- Lowes, F. J., 1966. Mean-square values on sphere of spherical harmonic vector fields. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 71, 2179.
- Malin, S. R. C. und Hodder, B. M., 1982. Was the 1970 geomagnetic jerk of internal or external origin? *Nature*, Bd. 296, 726–728.
- Mandea Alexandrescu, M., Gibert, D., Le Mouél, J.-L., Hulot, G. und Saracco, G., 1999. An estimate of average lower mantle conductivity by wavelet analysis of geomagnetic jerks. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 104(B8), 17 735–17 745.
- Martin, C. (Hg.), 2000. *Lexikon der Geowissenschaften*. Spektrum, Heidelberg.
- Martinec, Z., 1997. Spectral-finite-element approach to two-dimensional electromagnetic induction in a spherical Earth. *Geophysical Journal International*, Bd. 130, 583–594.
- Martinec, Z., 1999. Spectral-finite-element approach to three-dimensional electromagnetic induction in a spherical Earth. *Geophysical Journal International*, Bd. 136, 229–250.

- Martinec, Z., Everett, M. E. und Velínský, J., 2003. Time-domain, spectral finite-element approach to transient 2-D geomagnetic induction in a spherical heterogeneous Earth. *Geophysical Journal International*, Bd. 155, 33–43.
- Masters, G. und Gubbins, D., 2003. On the resolution of density within the Earth. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Bd. 140, 159–167.
- Mauersberger, P., 1956. Das Mittel der Energiedichte des geomagnetischen Hauptfeldes an der Erdoberfläche und seine säkulare Änderung. *Gerlands Beiträge zur Geophysik*, Bd. 65, 207–215.
- McDonald, K. L., 1957. Penetration of the geomagnetic secular field through a mantle with variable conductivity. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 62(1), 117–141.
- McElhinny, M. W., McFadden, P. L. und Merrill, R. T., 1996. The myth of the Pacific dipole window. *Earth and Planetary Science Letters*, Bd. 143, 13–22.
- McLeod, M. G., 1986. Stochastic processes on a sphere. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Bd. 43, 283–299.
- McLeod, M. G., 1994. Magnetospheric and ionospheric signals in magnetic observatory monthly means: Electrical conductivity of the deep mantle. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 99(B7), 13 577–13 590.
- McLeod, M. G., 1996. Spatial and temporal power spectra of the geomagnetic field. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 101(B2), 2745–2763.
- Meier, S. und Keller, W., 1990. *Geostatistik: Einführung in die Theorie der Zufallsprozesse*. Springer Verlag, Wien.
- Merrill, R. T., McElhinny, M. W. und McFadden, P. L., 1996. *The Magnetic Field of the Earth – Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*, Bd. 63 von *International Geophysics Series*. Academic Press, San Diego.
- Miletich, R., 1998. Diamanten als Fenster zum Erdinnern – Experimentelle Hochdruckforschung in den Geowissenschaften. *Mitteilungen der Österreichischen Mineralogischen Gesellschaft*, Bd. 143, 55–73.
- Murakami, M., Hirose, K., Kawamura, K., Sata, N. und Ohishi, Y., 2004. Post-perovskite phase transition in MgSiO_3 . *Science*, Bd. 304, 855–858.
- Nagao, H., Iyemori, T., Higuchi, T. und Araki, T., 2003. Lower mantle conductivity anomalies estimated from geomagnetic jerks. *Journal of Geophysical Research*, Bd. 108(B5), 2254–2271.
- Oganov, A. R. und Ono, S., 2004. Theoretical and experimental evidence for a post-perovskite phase of MgSiO_3 in Earth's D'' layer. *Nature*, Bd. 430, 445–448.

- Ono, S., Oganov, A. R., Koyama, T. und Shimizu, H., 2006. Stability and compressibility of the high-pressure phases of Al_2O_3 up to 200 GPa: Implications for the electrical conductivity of the base of the lower mantle. *Earth and Planetary Science Letters*, Bd. 246, 326–335.
- Parker, R. L., 1970. The inverse problem of electrical conductivity in the mantle. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Bd. 22, 121–138.
- Parkinson, W. D. und Hutton, V. R. S., 1989. The electrical conductivity of the Earth. In Jacobs, J. A. (Hg.), *Geomagnetism*, Bd. 3, Kap. 4, 261–321. Academic Press, London.
- Ripley, B. D., 1987. *Stochastic Simulation*. John Wiley, New York.
- Rotanova, N. M., Bondar', T. N. und Ivanov, V. V., 2002. Time changes in secular geomagnetic variations. *Geomagnetism and Aeronomy*, Bd. 42(5), 676–687.
- Shankland, T. J., Peyronneau, J. und Poirier, J.-P., 1993. Electrical conductivity of the Earth's lower mantle. *Nature*, Bd. 366, 453–455.
- Shimizu, H. und Utada, H., 2004. The feasibility of using decadal changes in the geoelectric field to probe the Earth's core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Bd. 142, 297–319.
- Simon, M. K., 2006. *Probability Distributions involving Gaussian Random Variables*. Springer Verlag, Berlin.
- Smylie, D. E., 1965. Magnetic diffusion in a spherically-symmetric conducting mantle. *Geophysical Journal International*, Bd. 9, 169–184.
- Stacey, F. D., 1992. *Physics of the Earth*. 3. Aufl. Brookfield Press, Brisbane.
- Stacey, F. D. und Anderson, O. L., 2001. Electrical and thermal conductivities of Fe-Ni-Si alloy under core conditions. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Bd. 124, 153–162.
- Stacey, F. D. und Davis, P. M., 2008. *Physics of the Earth*. 4. Aufl. Cambridge University Press, Cambridge.
- Stadelmann, A., 2004. Globale Effekte einer Erdmagnetfeldumkehrung : Magnetosphärenstruktur und kosmische Teilchen. Copernicus, Katlenburg-Lindau.
- Stewart, D. N., Busse, F. H., Whaler, K. A. und Gubbins, D., 1995. Geomagnetism, Earth rotation and the electrical conductivity of the lower mantle. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Bd. 92, 199–214.
- Strobach, K., 1991. *Unser Planet Erde – Ursprung und Dynamik*. Gebrüder Borntraeger, Berlin.
- Tromp, J. und Dziewonski, A. M., 1998. Two views of the deep mantle. *Science*, Bd. 281, 655–656.

- Uyeshima, M. und Schultz, A., 2000. Geoelectromagnetic induction in a heterogenous sphere: a new three-dimensional forward solver using a conservative staggered-grid. *Geophysical Journal International*, Bd. 140, 636–650.
- Vasseur, G. und Weidelt, P., 1977. Bimodal electromagnetic induction in non-uniform thin sheets with an application to the northern Pyrenean induction anomaly. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Bd. 51, 669–690.
- Velínský, J. und Martinec, Z., 2005. Time-domain, spherical harmonic-finite element approach to transient three-dimensional geomagnetic induction in a spherical heterogeneous Earth. *Geophysical Journal International*, Bd. 161, 81–101.
- Walker, A. D. und Backus, G. E., 1996. On the difference between the average values of B_r^2 in the Atlantic and Pacific hemispheres. *Geophysical Research Letters*, Bd. 23(15), 1965–1968.
- Walker, A. D. und Backus, G. E., 1997. A six-parameter statistical model of the Earth's magnetic field. *Geophysical Journal International*, Bd. 130, 693–700.
- Weaver, J. T., 1994. Mathematical methods for geo-electromagnetic induction. Research Studies Press, Taunton.
- Weidelt, P., 1972. Kugelfunktionen mit Anwendungen. Vorlesungsskript. Institut für Geophysik und Meteorologie, Braunschweig.
- Weiss, J. C. und Everett, M. E., 1998. Geomagnetic induction in a heterogeneous sphere: fully three-dimensional test computations and the response of a realistic distribution of oceans and continents. *Geophysical Journal International*, Bd. 135, 650–662.
- Wolf-Gladrow, D. A., 1987. An Introduction to Poloidal and Toroidal Fields, Bd. 54 von Mitteilungen aus dem Institut für Geophysik und Meteorologie der Universität zu Köln. Institut für Geophysik und Meteorologie, Köln.
- Wyssession, M., 1995. The inner workings of the Earth. *American Scientist*, Bd. 83(2), 134–147.
- Xu, Y., Shankland, T. J. und Duba, A. G., 2000. Pressure effect on electrical conductivity of mantle olivine. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Bd. 118, 149–161.

Danksagung

Prof. Dr. P. Weidelt hat die Untersuchung des Einflusses des lateral inhomogenen Mantels auf die Säkularvariation angeregt und mit großer Hilfsbereitschaft betreut. Sein plötzlicher Tod im Juli 2009 hat mich tief berührt. Viele Jahre ist er mein Lehrer gewesen und hat mir in zahlreichen Gesprächen Einblicke in die Physik gegeben. Ihm verdanke ich sehr viel.

Prof. Dr. K.-H. Glaßmeier hat mich und meine Arbeit sehr unterstützt. Zum einen hat er sich nach dem Tod von Prof. Dr. P. Weidelt als Mentor zur Verfügung gestellt, und zum anderen ist er Koordinator des DFG-Schwerpunktprogramms 1097 „Erdmagnetische Variationen“ gewesen, in dessen Rahmen diese Arbeit entstanden ist.

Bedanken möchte ich mich bei Prof. Dr. L. Engelhard, der mit seiner Vorlesung meine Begeisterung für die Geophysik geweckt hat.

Dr. Günter Musmann hat mir immer mit Rat zur Seite gestanden und mich über viele Jahre in Projekte einbezogen, die sich mit der magnetischen Reinheit von Satelliten befassen haben und an denen ich viel Spaß gehabt habe. Dafür danke ich ihm herzlich.

Oliver Bäumer, Jean-Mathias Griesmeier und Anja Stadelmann danke ich für ihre Hilfe. Sie haben diese Arbeit auch Korrektur gelesen und mir unzählige Hinweise gegeben und viele Anmerkungen gemacht. Für hilfreiche Diskussionen und zahlreiche Anregungen möchte ich mich auch bei Axel Kampke und Christiane Stuntebeck bedanken.

Danken möchte ich auch der DFG, die diese Arbeit im Rahmen eines Schwerpunktprogramms gefördert hat.

Bei meiner Familie, und ganz besonders bei meiner Frau, möchte ich mich für ihre unermüdliche Unterstützung und ihre Geduld bedanken.